1. **ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය** භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $7^n - 1$ යන්න 6 න් බෙදෙන බව සාධනය කරන්න.

$n = 1$ සඳහා $7^n - 1 = 7 - 1 = 6$ හා එය 6 න් බෙදේ.

$\therefore$ $n = 1$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. (5)

ඕනෑම $k \in \mathbb{Z}^+$ ගෙන, ප්‍රතිඵලය $n = k$ සඳහා සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරමු.

එනම් $7^k - 1$ යන්න 6 න් බෙදේ. (5)

$\therefore$ $7^k - 1 = 6p$ වන පරිදි $p \in \mathbb{Z}^+$ පවතී. (5)

දැන්, $7^{k+1} - 1 = 7.7^k - 1$

$= 7(6p + 1) - 1$

$= 42p + 6$

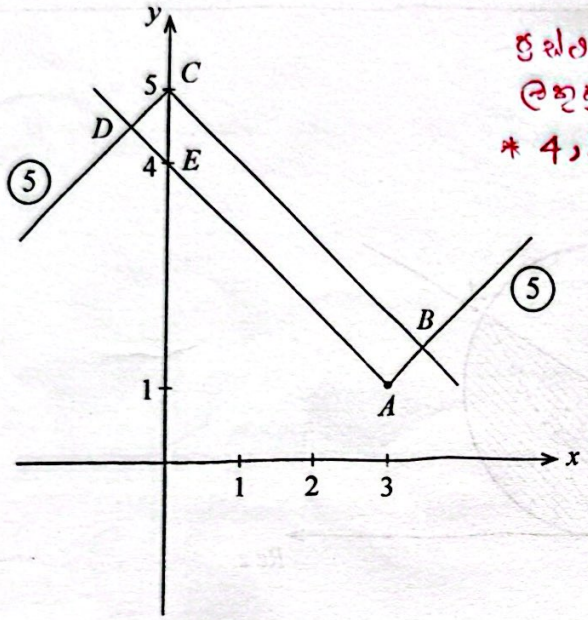
$= 6(7p + 1)$, හා මෙය 6 න් බෙදේ. (5)

ඒ නයින්, $n = k$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය නම් $n = k + 1$ සඳහා ද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. $n = 1$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය බව සාධනය කර ඇත.

ඒ නයින්, ගණිතමය අභ්‍යුහන මූලධර්මය මගින් ප්‍රතිඵලය සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහාම සත්‍ය වේ. (5)

Scanned with CamScanner

2. එකම රූප සටහනක $y=|x-3|+1$ හා $y=5-|x|$ හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න.
ඒනයින්, මෙම ප්‍රස්තාරවලින් ආවෘත වූ සෘජුකෝණාස්‍රාකාර පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය සොයන්න.



ප්‍රස්තාර 2 ම හැඩයට ලකුණු ලබා දෙයි.
* 4,5 ලකුණු කිරීම අවශ්‍ය නොවේ.

$CD = 1\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ← (5)

$AD = DE + EA = 1\sin 45° + \sqrt{3^2+3^2}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}$ ← (5)

$= \frac{7}{\sqrt{2}}$

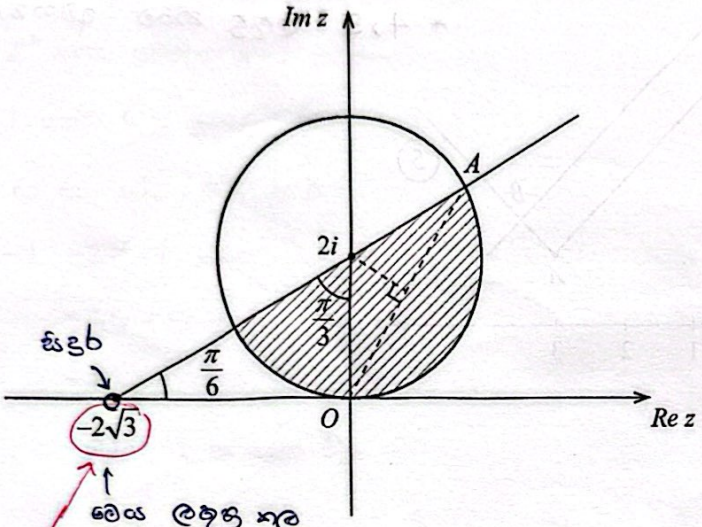
$\therefore$ අවශ්‍ය වර්ගඵලය $= CD \cdot AD$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{7}{\sqrt{2}}$ (මීට මුලට වෙන ප්‍රකාශනයනවත් දෙන්න)

$= \frac{7}{2}$ වර්ග ඒකක. (5) ඉන්ඩාන ඒවාලින්යෙන් සෘදා ඇති නිවි ලකුණු දෙන්න.

මේක අවශ්‍ය නැත.

3. $|z-2i| \leq 2$ හා $0 \leq \text{Arg}\left(z+2\sqrt{3}\right) \leq \frac{\pi}{6}$ යන අසමානතා සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යවලින් සමන්විත පෙදෙස ආඟන්ඩ් සටහනක අඳුරු කරන්න.
මෙම අඳුරු කළ පෙදෙසෙහි ලක්ෂ්‍යවලින් නිරූපණය කරනු ලබන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සඳහා $|z|$ හි වැඩිතම අගය සොයන්න.



සිදුර

මෙය ලකුණු කළ යුතුයි.

සිදුර සඟන අර්ධ රේඛාව (5) (අර්ධ රේඛාව 2i හරහා සහ යුතු නැත)

O හිදී x-අක්ෂය ස්පර්ශ කරන වෘත්තය (5)

නිවැරදි පෙදෙස අඳුරු කිරීම (5)

$|z|$ හි අවශ්‍ය වැඩිතම අගය $= OA$ (5)

$= 2 \times 2\sin\frac{\pi}{3}$

$= 2\sqrt{3}$ (5)

මේ පිළිතුර හෙන ඇති නම් ලකුණු (10) ම දෙන්න.

$A \equiv 2\cos\pi/6, 2+2\sin\pi/6$

$\equiv \sqrt{3}, 3$

$OA = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (3)^2}$

$= 2\sqrt{3}$ //

Scanned with CamScanner

4. $\left(1+x^3\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^9$ ප්‍රසාරණයෙහි නියත පදය 93 බව පෙන්වන්න.

$\left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^9$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණයේ සාධාරණ පදය $= {}^9C_r x^r \left(\frac{-1}{\sqrt{x}}\right)^{9-r}$ (5) ← සාධාරණ පදයට

$= {}^9C_r x^r \cdot x^{\left(\frac{r}{2}-\frac{9}{2}\right)}(-1)^{9-r}$

$= {}^9C_r x^{\left(\frac{3r}{2}-\frac{9}{2}\right)} (5)(-1)^{9-r}$

x වල බලය නිවැරදි විට

$\therefore \left(1+x^3\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^9$ හි ප්‍රසාරණයේ නියත පද ලැබෙන්නේ $\frac{3r}{2}-\frac{9}{2}=0$ විට හා $\frac{3r}{2}-\frac{9}{2}=-3$ වන විට ය. (5)

එනම් $r=3$ විට හා $r=1$ විට.

$\therefore$ අවශ්‍ය නියත පදය $= {}^9C_1 + {}^9C_3$ ← (5)

$= \frac{9!}{8!} + \frac{9!}{3!6!}$

$= 9 + \frac{9\times 8\times 7}{2\times 3}$

$= 9 + 84$

$= 93.$ (5)

Scanned with CamScanner

5. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\left(\sqrt{x-3}-1\right)}{(x-4)^2}\sin\left(\sqrt{x}-2\right)=\dfrac{1}{8}$ බව පෙන්වන්න.

$$\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{x-3}-1\right)}{(x-4)^2}\sin\left(\sqrt{x}-2\right)$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{x-3}-1\right)}{(x-4)^2}\cdot\frac{\left(\sqrt{x-3}+1\right)}{\left(\sqrt{x-3}+1\right)}\cdot\sin\left(\sqrt{x}-2\right)$$ (5)

ප්‍රතිබද්ධයෙන් ගුණ කිරීම.

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)}{(x-4)^2\left(\sqrt{x-3}+1\right)}\cdot\sin\left(\sqrt{x}-2\right)$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x-3}+1\right)}\cdot\frac{\sin\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)}$$ (5)

සාධක වෙන් කිරීමට

$$=\frac{1}{\left(\sqrt{4}+2\right)\left(\sqrt{1}+1\right)}\cdot 1$$ (5) + (5) (1 නොදා හිටියත් ලකුණු දෙන්න)

ආදේශ යට

$$=\frac{1}{8}.$$ (5)

Scanned with CamScanner

6. $y=\dfrac{2}{x\sqrt[4]{4-x^2}}$, $y=0, x=1$ හා $x=\sqrt{2}$ වක්‍ර මගින් ආවෘත වන පෙදෙස x-අක්ෂය වටා 2π රේඩියනවලින් භ්‍රමණය කරනු ලබයි. මෙලෙස ජනනය කරනු ලබන ඝන වස්තුවෙහි පරිමාව $\pi\left(\sqrt{3}-1\right)$ බව පෙන්වන්න.

අවශ්‍ය පරිමාව $= \pi\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} y^2\,dx$ ← (5)

$y \Rightarrow f(x)$ නිබඳන් රැඳුන

$(1, \sqrt{2})$ යෙ නිර්ය යුතුයි. සීමාව

$= \pi\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{4}{x^2\sqrt{4-x^2}}\,dx$

$x = 2\sin t$ යැයි ගනිමු.
එවිට $dx = 2\cos t\,dt$ වේ.

ආදේශයට අනුව සීමා මාරු කර නිර්ය ලියූ යි

$= \pi\displaystyle\int_{*\frac{\pi}{6}}^{*\frac{\pi}{4}} \frac{4}{4\sin^2 t\sqrt{4-4\sin^2 t}}\cdot 2\cos t\,dt$ (5) ←

* වෙන ආදේශ යොදා පිළිතුරට එළඹෙන්නේ නැත්නම් Part marks නොදේ.

$= \pi\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 t\cdot 2\cos t}\cdot 2\cos t\,dt$

$= \pi\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{cosec}^2 t\,dt$ (5)

$= \pi(-\cot t)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$ (5) මේ ප්‍රතිචාරේදී නැතත් සීමාව පෙර යොදා ඇතත් දෙන්න.

$= \pi\left(-\cot\dfrac{\pi}{4}+\cot\dfrac{\pi}{6}\right)$

$= \pi\left(\sqrt{3}-1\right).$ (5)

Scanned with CamScanner

7. C යනු $t > 0$ සඳහා $x = \ln t$ හා $y = e^t + t\ln t$ මගින් පරාමිතිකව දෙනු ලබන වක්‍රය යැයි ගනිමු.
$\frac{dy}{dx} = t(e^t + \ln t + 1)$ බව පෙන්වන්න.
C වක්‍රයට $t = 1$ ට අනුරූප ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි ස්පර්ශකය $(1, a)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා ගමන් කරයි නම්, $a = 1 + 2e$ බව පෙන්වන්න.

$t > 0$ සඳහා $x = \ln t$ හා $y = e^t + t\ln t$.

$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$ හා $\frac{dy}{dt} = e^t + \ln t + t\cdot\frac{1}{t}$ (5)

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{(e^t + \ln t + 1)}{\frac{1}{t}}$

$= t(e^t + \ln t + 1).$ (5)

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1} = e + \ln 1 + 1 = e + 1.$ (5)

$t = 1$ ට අනුරූප ලක්ෂ්‍ය $(0, e)$ වේ. (5)

$\therefore \frac{a-e}{1-0} = e + 1$

$\therefore a = 1 + 2e.$ (5)

Scanned with CamScanner

8. මූල ලක්ෂ්‍යයෙහි සිට ලම්බ දුර 1 ක් වන, $A \equiv (-1, 2)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන සරල රේඛා දෙකෙහි සමීකරණ සොයන්න.

* ඕනෑම රේඛාවක් $y = mx + c$ ආකාරයෙන් ලිවිය නොහැක.

$A \equiv (-1, 2)$ හරහා වූ ඕනෑම රේඛාවක සමීකරණය $a(x+1) + b(y-2) = 0$ ආකාරයෙන් වේ; මෙහි $a^2 + b^2 \neq 0$ වූ $a, b \in \mathbb{R}$ වේ. (5)

* මෙහි $x = -1$ යදහා (5)
ඉතිරි රේඛාවට (20)
$\frac{y-2}{x+1} = \frac{-a}{b}$

දත්තයෙන්: $\frac{|a-2b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 1$ ← (5)

$\Leftrightarrow \quad (a-2b)^2 = a^2 + b^2$

$\Leftrightarrow \quad 4ab - 3b^2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad b(4a - 3b) = 0$

$\Leftrightarrow \quad b = 0$ හෝ $a = \frac{3b}{4}$ (5)

අවශ්‍ය සමීකරණ $a(x+1) = 0$ හෝ $\frac{3b}{4}(x+1) + b(y-2) = 0$ වේ.

එනම්, $x = -1$ හෝ $3x + 4y - 5 = 0$.
(5) (5)

විකල්ප ක්‍රමය

$x = -1$ යනු $A \equiv (-1, 2)$ හරහා වූ එක් රේඛාවකි. ← (5)

$A \equiv (-1, 2)$ හරහා වූ වෙනත් ඕනෑම රේඛාවක් $y = mx + c$ යැයි ගනිමු.

එවිට $2 = m(-1) + c$ හා එනම් $c = m + 2$ වේ.

$\therefore \quad y = mx + m + 2.$ ← (5)

දත්තයෙන්: $\frac{|m+2|}{\sqrt{m^2+1}} = 1$ ← (5)

$\Leftrightarrow \quad (m+2)^2 = m^2 + 1$

$\Leftrightarrow \quad 4m + 4 = 1$

$\Leftrightarrow \quad m = -\frac{3}{4}.$ ← (5)

අනෙක් රේඛාව $y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4} + 2$ මගින් දෙනු ලැබේ.

එනම් $3x + 4y - 5 = 0.$ ← (5)

Scanned with CamScanner

9. $A \equiv (-1, 1)$ හා $B \equiv (3, 3)$ යැයි ගනිමු. AB විෂ්කම්භයක් වූ S වෘත්තයේ සමීකරණය ලියා දක්වන්න.
$x^2 + y^2 - 4x - 5y + 9 = 0$ වෘත්තය, S වෘත්තය B හි දී අභ්‍යන්තරව ස්පර්ශ කරන බව පෙන්වන්න.

S හි සමීකරණය

$(x + 1)(x - 3) + (y - 1)(y - 3) = 0.$ ← (5)

වෙනස් ආකාරයකට හොඳා ඇත්නම් (10)
(කේන්ද්‍රය හා අරය හාත්ත යෙන්) (5)

C_1 යනු S හි කේන්ද්‍රය යැයි ගනිමු.

එවිට $C_1 \equiv (1, 2)$.

එහි අරය $r_1 = \sqrt{5}$ } (5) මේ දෙකම නිවැරදි නම්

C_2 යනු $x^2 + y^2 - 4x - 5y + 9 = 0$ හි කේන්ද්‍රය යැයි ගනිමු.

එවිට $C_2 \equiv (2, \frac{5}{2})$.

එහි අරය $r_2 = \sqrt{(-2)^2 + \left(\frac{-5}{2}\right)^2 - 9} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. } (5) මේ දෙකම නිවැරදි නම්

දැන්, $C_1C_2 = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

$\therefore C_1C_2 = r_1 - r_2$. ← (5) අභ්‍යන්තරව ස්පර්ශ වීමේ අවශ්‍යතාව

දෙවන වෘත්තය මත B පිහිටන බව සත්‍යාපනය කිරීම සඳහා ← (5) B ඛණ්ඩාංකය ආදේශයට

$\therefore x^2 + y^2 - 4x - 5y + 9 = 0$ වෘත්තය S වෘත්තය B හිදී අභ්‍යන්තරව ස්පර්ශ කරයි.

Scanned with CamScanner

10. $\frac{\cot\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\cot\theta}{1-\sin\theta}\equiv 4\operatorname{cosec} 2\theta$ බව පෙන්වන්න.

එනයින්, $\frac{\cot\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\cot\theta}{1-\sin\theta}=8\cos 2\theta$ විසඳන්න.

$$\frac{\cot\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\cot\theta}{1-\sin\theta}$$

$$=\frac{[(1-\sin\theta)+(1+\sin\theta)]\cot\theta}{1-\sin^2\theta}$$

$$=\frac{2\cot\theta}{\cos^2\theta}\quad (5)$$

$$=\frac{2}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$=4\operatorname{cosec} 2\theta. \quad (5)$$

$$\frac{\cot\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\cot\theta}{1-\sin\theta}=8\cos 2\theta$$

$4\operatorname{cosec} 2\theta=8\cos 2\theta \leftarrow (5)$

$2\cos 2\theta\sin 2\theta=1$

$\sin 4\theta=1 \leftarrow (5)$

$\sin 4\theta=\sin\frac{\pi}{2}$

$\therefore 4\theta=n\pi \quad (+1)^n\frac{\pi}{2}$; මෙහි $n\in\mathbb{Z}$.

$\therefore \theta=\frac{n\pi}{4} \quad (+1)^n\frac{\pi}{8},$; මෙහි $n\in\mathbb{Z}$. (5)

$4\theta = n\pi + (-1)^n\pi/2$

$\theta = \frac{n\pi}{4} + (-1)^n\frac{\pi}{8}$ //

(මේ පියවරට දෙන්න)

Scanned with CamScanner

11. (*a*) $f(x) = x^2 + 2x + c$ යැයි ගනිමු; මෙහි $c \in \mathbb{R}$ වේ.

$f(x) = 0$ යන සමීකරණයට තාත්ත්වික ප්‍රභින්න මූල දෙකක් ඇති බව දී ඇත. $c < 1$ බව පෙන්වන්න.

α හා β යනු $f(x) = 0$ හි මූල යැයි ගනිමු.

$\alpha^2 + \beta^2 = 4 - 2c$ බව පෙන්වන්න.

$c \neq 0$ හා $\lambda \in \mathbb{R}$ යැයි ගනිමු. $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ හා $\beta + \frac{1}{\beta}$ මූල ලෙස ඇති වර්ගජ සමීකරණය $2x^2 + 12x + \lambda = 0$ වේ. c හා λ හි අගයන් සොයන්න.

(*b*) $f(x) = x^3 + px^2 + qx + p$ යැයි ගනිමු; මෙහි $p, q \in \mathbb{R}$ වේ. $f(x)$ යන්න $(x - 2)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය, $f(x)$ යන්න $(x - 1)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂයට වඩා 36 ක් වැඩි ය. $3p + q = 29$ බව පෙන්වන්න.

$(x + 1)$ යන්න $f(x)$ හි සාධකයක් බව ද දී ඇත.

$p = 6$ හා $q = 11$ බව පෙන්වා $f(x)$ සම්පූර්ණයෙන් සාධකවලට වෙන් කරන්න.

ඒ නයින්, $f(x) = 3(x + 2)$ විසඳන්න.

නිවේචනය ලිවීමට

(5) (5) ප්‍රහන්න මූල

(*a*) $\Delta = 4 - 4c > 0$. නිවීමට අවශ්‍යතාව

$\therefore c < 1$. ← (5)

15

$\alpha + \beta = -2$ and $\alpha\beta = c$.

(5) මූල දෙකේ ඓක්‍යය (5) මූල දෙකේ ගුණිතය

මූල දෙන් එකතුව

$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$ ← (5) ප්‍රකාශනයට

$= 4 - 2c$. (5) ආදේශයට

20

$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) + \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) = -\frac{12}{2}$ (10) / 00 * C සෙවීමට

මූල දෙකේ එකතුවට

(2.5)

$\alpha + \beta + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = -6$ (5) ← ආදේශයට සහන් කිරීමට

$-2 - \frac{2}{c} = -6$ (5) ← ආදේශයට

$\frac{2}{c} = 4$

$c = \frac{1}{2}$ (5)

Scanned with CamScanner

$\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)=\frac{\lambda}{2}$ (10) /00 * λ නෙවීමට 25

මුල දෙකේ ගුණිතයට

$\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\lambda}{2}$

$\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{\lambda}{2}$ ← (5) ආදේශයට සකස් කිරීමට

$c+\frac{1}{c}+\frac{4-2c}{c}=\frac{\lambda}{2}$

$\frac{1}{2}+2+\frac{4-2\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{\lambda}{2}$ (5) ← ආදේශයට

* වැරදි ඇති නම් λ හි ල.සා.ගු. ලැබේ.

$\frac{5}{2}+6=\frac{\lambda}{2}$

$\therefore\ \lambda=17.$ (5)

50

---

b) $f(x)=x^3+px^2+qx+p$

$f(x)$ යන්න $(x-2)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය

$=f(2)=8+4p+2q+p=8+5p+2q.$ (5) $x=2$ ආදේශයට

$f(x)$ යන්න $(x-1)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය

$=f(1)=1+p+q+p=1+2p+q.$ (5) $x=1$ ආදේශයට

$f(2)=36+f(1)$ බව දී ඇත. (5) සම්බන්ධතාවට

$8+5p+2q=36+1+2p+q.$

$3p+q=29$ ——— ①

(5)

20

$(x+1)$ යන්න $f(x)$ හි සාධකයක් බැවින් $f(-1)=0.$ (5) සාධක ප්‍රමේයය භාවිතයට

$\therefore\ -1+p-q+p=0$

$\therefore\ 2p-q=1$ ——— ② ← (5)

① හා ② $\Rightarrow\ 5p=30$

$\therefore p=6$ (5)

දැන් ① $\Rightarrow\ 18+q=29$

$\therefore q=11.$ (5)

Scanned with CamScanner

$f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

$= (x + 1)(x^2 + 5x + 6)$ (5) වර්ගේ නොවැඩ

$= (x + 1)(x + 2)(x + 3)$ (5) සාධක 3 ලබාගෙන ඇත්නම් ලකුණු 10යි.

30

$f(x) = 3(x + 2)$

$(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 3(x + 2)$

$(x + 2)[(x + 1)(x + 3) - 3] = 0$ (5)

$(x + 2)(x^2 + 4x) = 0$

$x(x + 2)(x + 4) = 0$ (5)

$\therefore x = 0$ or $x = -2$ or $x = -4$. (5)

(5) (5) (5)

සිමිතුරු 3ට (5) බැගින්.

15

Scanned with CamScanner

12. (*a*) පවුලක දෙමාපියන් තම ළඟම ඥාතීන් 15 දෙනෙකු අතුරෙන් 6 දෙනෙකුට රාත්‍රී භෝජන සංග්‍රහයකට ආරාධනා කිරීමට තීරණය කරති. පියාට ළඟම ගැහැනු ඥාතීන් 5 දෙනෙකු හා ළඟම පිරිමි ඥාතීන් 3 දෙනෙකු සිටින අතර, මවට ළඟම ගැහැනු ඥාතීන් 3 දෙනෙකු හා ළඟම පිරිමි ඥාතීන් 4 දෙනෙකු සිටී.

(i) පියාට ඔහුගේ ළඟම ගැහැනු ඥාතීන් 3 දෙනෙකුටත් මවට ඇයගේ ළඟම පිරිමි ඥාතීන් 3 දෙනෙකුටත් ආරාධනා කළ හැකි

(ii) පිරිමි ආරාධිතයන් 3 දෙනෙකු හා ගැහැනු ආරාධිතයන් 3 දෙනෙකු වන පරිදි, පියාට ඔහුගේ ළඟම ඥාතීන් 3 දෙනෙකුටත් මවට ඇයගේ ළඟම ඥාතීන් 3 දෙනෙකුටත් ආරාධනා කළ හැකි

වෙනස් විධි ගණන සොයන්න.

(*b*) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{1}{r(r+2)(r+4)}$ හා $f(r) = \dfrac{1}{r(r+2)}$ යැයි ගනිමු.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $f(r) - f(r+2) = AU_r$ වන පරිදි A තාත්ත්වික නියතයෙහි අගය නිර්ණය කරන්න.

ඒ නයින්, $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} U_r = \dfrac{11}{96} - \dfrac{1}{4(n+1)(n+3)} - \dfrac{1}{4(n+2)(n+4)}$ බව පෙන්වන්න.

තවද, $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වා එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} (mU_r + U_{n+1-r}) = \dfrac{11}{32}$ වන පරිදි m තාත්ත්වික නියතයෙහි අගය සොයන්න.

12. (*a*)

පියා		මව	
ගැහැනු ඥාතීන්	පිරිමි ඥාතීන්	ගැහැනු ඥාතීන්	පිරිමි ඥාතීන්
5	3	3	4

(i) පියාට ඔහුගේ ළඟම ගැහැනු ඥාතීන් 3 දෙනෙකුට ආරාධනා කළ හැකි වෙනස් විධි ගණන $= {}^5C_3$ (5)

මවට ඇයගේ ළඟම පිරිමි ඥාතීන් 3 දෙනෙකුට ආරාධනා කළ හැකි වෙනස් විධි ගණන $= {}^4C_3$ (5)

$\therefore$ පියාට ඔහුගේ ළඟම ගැහැනු ඥාතීන් 3 දෙනෙකුටත් මවට ඇයගේ ළඟම පිරිමි ඥාතීන් 3 දෙනෙකුටත් ආරාධනා කළ හැකි වෙනස් විධි ගණන $= {}^5C_3 \times {}^4C_3$ (5)

$= \dfrac{5!}{3!2!} \times \dfrac{4!}{3!1!} = \dfrac{5 \times \cancel{4}^{2}}{\cancel{2}} \times 4 = 40$ (5) නිවැරදි → 40

20

Scanned with CamScanner

(ii)

	පියා	මව	වෙනස් විධි ගණන	
00/ (10)	ගැහැනු 3 ක්	පිරිමි 3 ක්	${}^5C_3 \times {}^4C_3 = 40$	
	ගැහැනු 2 ක් හා පිරිමි 1 ක්	ගැහැනු 1 ක් හා පිරිමි 2 ක්	${}^5C_2 \times {}^3C_1 \times {}^3C_1 \times {}^4C_2 = 540$ (4ක් 2ක් හරි නම් (5))	(10)
	ගැහැනු 1 ක් හා පිරිමි 2 ක්	ගැහැනු 2 ක් හා පිරිමි 1 ක්	${}^5C_1 \times {}^3C_2 \times {}^3C_2 \times {}^4C_1 = 180$ (4ක් 2ක් හරි නම් (5))	(10)
	පිරිමි 3 ක්	ගැහැනු 3 ක්	${}^3C_3 \times {}^3C_3 = 1$	(5)

පිළිතුර = 40 + 540 + 180 + 1 = 761. (5)

මොනම ක්‍රම හෝ සියලු ආකාර ලියා ඇත්නම් (40) ම දෙන්න

40

(b) $f(r) - f(r+2) = \dfrac{1}{r(r+2)} - \dfrac{1}{(r+2)(r+4)}$ (5) ආදේශයට

$= \dfrac{(r+4)-r}{r(r+2)(r+4)}$ (5) පොදු හරයට

$= 4\,\dfrac{1}{r(r+2)(r+4)}$

$= 4U_r$ (5) මුළු කිරීමට

$\therefore A = 4.$ (5)

20

$\therefore \quad 4U_r = f(r) - f(r+2)$ for $r \in \mathbb{Z}^+$.

$r = 1 \quad : \quad 4U_1 = f(1) - f(3)$

$r = 2 \quad : \quad 4U_2 = f(2) - f(4)$ (5)

$r = 3 \quad : \quad 4U_3 = f(3) - f(5)$

(ඕනෑවට) ඉහළින් පද 3ක් ලිව්ව පුළුවන්.

. . . .

. . . .

. . . .

$r = n-2 \quad : \quad 4U_{n-2} = f(n-2) - f(n)$

$r = n-1 \quad : \quad 4U_{n-1} = f(n-1) - f(n+1)$ (5)

$r = n \quad : \quad 4U_n = f(n) - f(n+2)$

ඉහළින් ඕනෑවට 3ක් ලිව්ව පුළුවන්.

$4\sum_{r=1}^{n} U_r = f(1) + f(2) - f(n+1) - f(n+2)$ (10)/00

$= \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{(n+1)(n+3)} - \dfrac{1}{(n+2)(n+4)}$ (10)/00

වැරදි A සඳහා ල. (30) කි. අවසාන (5) නිවැරදි නොවේ.

$\therefore \sum_{r=1}^{n} U_r = \dfrac{11}{96} - \dfrac{1}{4(n+1)(n+3)} - \dfrac{1}{4(n+2)(n+4)}$ (5)

Scanned with CamScanner

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n} U_r = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{11}{96} - \frac{1}{4(n+1)(n+3)} - \frac{1}{4(n+2)(n+4)}\right\}$$ (5) සීමාව ලබාගැනීම

$$= \frac{11}{96}.$$ (5) අගය සඳහා

$\therefore \sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අභිසාරී වන අතර එහි ඓක්‍යය $= \frac{11}{96}$. (5) $\sum_{r=1}^{\infty} U_r = \frac{11}{96}$ අභිසාරී බව ලෙසත් [15]

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\left(mU_r + U_{n+1-r}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(m\sum_{r=1}^{n} U_r + \sum_{r=1}^{n} U_{n+1-r}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(m\sum_{r=1}^{n} U_r + \sum_{r=1}^{n} U_r\right)$$ (10) /(∞) දීපු ශ්‍රේණියම බව හඳුනා ගැනීමට

$$= (m+1)\sum_{r=1}^{\infty} U_r$$

$\therefore (m+1)\frac{11}{96} = \frac{11}{32}$ (5) අදේශයට

$\therefore m+1 = 3$ හා $m = 2$. (5)

[20]

Scanned with CamScanner

13. (*a*) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & a & 2\end{pmatrix}$ හා $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0 & a & b\\ 3 & b & a\end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a, b \in \mathbb{R}$ වේ. $2\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 3\\ 9 & 5 & 4\end{pmatrix}$ යැයි දී ඇත.

$a=0$ හා $b=5$ බව පෙන්වන්න.

a හා b හි මෙම අගයන් සඳහා, $\mathbf{C}=\mathbf{AB}^{\mathrm{T}}$ යැයි ගනිමු.

$\mathbf{C}$ සොයා $\mathbf{C}^{-1}$ ලියා දක්වන්න.

$\mathbf{DC}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ වන පරිදි වූ $\mathbf{D}$ න්‍යාසය සොයන්න.

(*b*) $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ යැයි ගනිමු.

(i) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z}_1+\overline{z}_2$

(ii) $\overline{z_1 z_2}=\overline{z}_1\overline{z}_2$

(iii) $z_1\overline{z}_1=|z_1|^2$

බව පෙන්වන්න.

$z_2 \neq 0$ සඳහා $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$ යන ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන්, $|z_1|=1$ හා $z_1 \neq \pm 1$ නම් ද $\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ යන්: තාත්ත්වික ද නම්, $|z_2|=1$ බව පෙන්වන්න.

(*c*) $\sqrt{3}+i$ යන්න $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $r>0$ හා $0<\theta<\frac{\pi}{2}$.

ද මුවාවර් ප්‍රමේය භාවිතයෙන්, $\frac{\left(\sqrt{3}+i\right)^{24}}{2^{23}(1+i)}=1$ බව පෙන්වන්න.

(*a*) $2\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 3\\ 9 & 5 & 4\end{pmatrix}$.

$$2\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & a & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & a & b\\ 3 & b & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 3\\ 9 & 5 & 4\end{pmatrix}$$

2A+B
සුළු නිශ්ඛ (10) $\begin{pmatrix}2 & 4+a & -2+b\\ 6+3 & 2a+b & 4+a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 3\\ 9 & 5 & 4\end{pmatrix}$

(හෝ (00))

$\Leftrightarrow 4+a=4$, $-2+b=3$ හා $2a+b=5$ (10) ඕනෑම දෙකක් සඳහා.

(හෝ (00))

$\Leftrightarrow a=0$ හා $b=5$. (5)

Scanned with CamScanner

$C = AB^T$ (5) ගණනය

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 13 \\ 10 & 9 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$C^{-1} = -\frac{1}{175}\begin{pmatrix} 9 & -13 \\ -10 & -5 \end{pmatrix} \quad (10)$$

(5) + (5)

25

$$DC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\therefore D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} C^{-1}$ ← (5)

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\left[-\frac{1}{175}\begin{pmatrix} 9 & -13 \\ -10 & -5 \end{pmatrix}\right]$$ ← වැරදි C^{-1} ආදේශ කෙරේ

නිවැරදි නම් (10) ක් ලැබේ.

$$= \frac{-1}{175}\begin{pmatrix} 9 & -13 \\ -20 & -10 \end{pmatrix} \quad (10)$$

(5) + (5)

15

(b) Let $z_1 = x_1 + iy_1$ සහ $z_2 = x_2 + iy_2$; මෙහි $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

(i) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)}$

$= (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2)$ (5)

$= (x_1 - iy_1) + (x2 - iy_2)$

$= \overline{z_1} + \overline{z_2}$ (5)

10

Scanned with CamScanner

(ii) $\overline{z_1 z_2} = \overline{(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)}$

$= \overline{(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)}$

$= (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + y_1x_2)$ (5)

$\overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2 = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2)$

$= (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + y_1x_2)$ (5)

$\therefore \overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2$. (5)

15

(iii) $z_1\overline{z}_1 = (x_1 + iy_1)(x_1 - iy_1)$

$= x_1^2 + y_1^2$ (5)

$= |z_1|^2$. (5)

10

$\overline{\left(\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}\right)} = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ (5)

$\Rightarrow \frac{\overline{z}_1 + \overline{z}_2}{1 + \overline{z}_1 \overline{z}_2} = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ (5)

$\Rightarrow \overline{z}_1 + \overline{z}_1 z_1 z_2 + \overline{z}_2 + \overline{z}_2 z_1 z_2 = z_1 + z_2 + \overline{z}_1 \overline{z}_2 z_1 + \overline{z}_1 \overline{z}_2 z_2 \neq 0$

$\Rightarrow \overline{z}_1 + |\overline{z}_1|^2 z_2 + \overline{z}_2 + z_1 |\overline{z}_2|^2 = z_1 + z_2 + \overline{z}_2 |\overline{z}_1|^2 + \overline{z}_1 |\overline{z}_2|^2 \neq 0$ (5) $|z_1|^2$, $|z_2|^2$ සඟහා කිරීමට

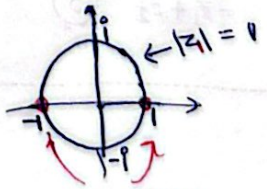
$\Rightarrow \overline{z}_1 + z_2 + \overline{z}_2 + z_1 |z_2|^2 = z_1 + z_2 + \overline{z}_2 + \overline{z}_1 |z_2|^2 \neq 0$

$\Rightarrow (z_1 - \overline{z}_1)\left(|\overline{z}_2|^2 - 1\right) = 0$ (5)

$\Rightarrow |z_2|^2 - 1 = 0 \quad (\because \overline{z}_1 \neq z_1)$ *

$\Rightarrow |z_2| = 1$. (5)

$(|z_1| = 1$ and $z_1 \neq \pm 1)$ $\neq$



$z_1 \neq \pm 1$

මූලාරම්භය හැර වෙනත් කවර හෝ z_1 ලක්ෂ්‍යයක් $z_1 \neq \overline{z}_1$ බව.

25

Scanned with CamScanner

(c) $\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)+$ (5)

$=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)+$ (5)

$r=2$ සහ $\theta=\frac{\pi}{6}$.

$\frac{\sqrt{3}+i}{2^{23}(1+i)}=\frac{2^{24}(\cos 4\pi+i\sin 4\pi)}{2^{23}(1+i)}$ (5) දෙමුවහාර භාජනය.
ඵලයයි

$=\frac{2}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}$ (5)

$=\frac{2(1-i)}{2}$ ඵලයේ ඒකාකාර

$=1-i.$ (5)

25

Scanned with CamScanner

14. (*a*) $x \in \mathbb{R} - \{1, 2\}$ සඳහා $f(x) = \dfrac{px+q}{(x-1)(x-2)}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $p, q \in \mathbb{R}$ වේ.

$y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයට $(0, 1)$ හි දී ස්ථාවර ලක්ෂ්‍යයක් ඇති බව දී ඇත. $p = -3$ හා $q = 2$ බව පෙන්වන්න.

p හා q හි මෙම අගයන් සඳහා, $f(x)$ හිව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)$ යන්න $x \neq 1, 2$ සඳහා $f'(x) = \dfrac{x(3x-4)}{(x-1)^2(x-2)^2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වා, $f(x)$ අඩුවන ප්‍රාන්තර හා $f(x)$ වැඩිවන ප්‍රාන්තර සොයන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ හා හැරුම් ලක්ෂ්‍ය දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

ඒ නයින්, $x^2(x-1)(x-2) = 2 - 3x$ සමීකරණයේ තාත්ත්වික විසඳුම් ගණන සොයන්න.

(*b*) පියනක් සහ පතුලක් සහිත සිලින්ඩරයක්, පරිමාව 1024π cm^3 වන පරිදි සාදා ඇත. සිලින්ඩරයේ අර r cm යැයි ගනිමු. සිලින්ඩරයේ මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය S cm^2 යන්න $r > 0$ සඳහා $S = 2\pi\left(\dfrac{1024}{r} + r^2\right)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

S අවම වන්නේ $r = 8$ වන විට බව පෙන්වන්න.

(*a*) $f(0) = 1$ බැවින් $\dfrac{q}{2} = 1$ වේ.

$\therefore q = 2$ (5)

$f'(x) = \dfrac{(x-1)(x-2)p - (px+q)(x-1+x-2)}{(x-1)^2(x-2)^2}$; $x \neq 1, 2$ සඳහා (10)

$f'(0) = 0$ බැවින් $2p - q(-3) = 0$ වේ. (5)

$\therefore 2p = -3q$

$= -6$

$\therefore p = -3$ (5)

$f'(x) = \dfrac{-3(x^2-3x+2) - (-3x+2)(2x-3)}{(x-1)^2(x-2)^2}$ (5) (p,q ආදේශයට)

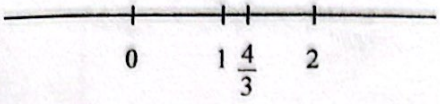
$= \dfrac{-3x^2+9x-6+6x^2-13x+6}{(x-1)^2(x-2)^2}$

$= \dfrac{3x^2-4x}{(x-1)^2(x-2)^2}$

$= \dfrac{x(3x-4)}{(x-1)^2(x-2)^2}$ (5) for $x \neq 1, 2$. ← සාධක වෙන් කිරීමට

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ හෝ $x = \dfrac{4}{3}$. (5)

Scanned with CamScanner



	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < \frac{4}{3}$	$\frac{4}{3} < x < 2$	$2 < x < \infty$
~~Sign of~~ $f'(x) = \frac{x(3x-4)}{(x-1)^2(x-2)^2}$ ලකුණ	$\frac{(-)(-)}{(+)}$ $= (+)$ (5)	$\frac{(+)(-)}{(+)}$ $= (-)$ (5)	$\frac{(+)(-)}{(+)}$ $= (-)$ (5)	$\frac{(+)(+)}{(+)}$ $= (+)$ (5)	$\frac{(+)(+)}{(+)}$ $= (+)$ (5)
$f(x)$	↗	∩ ↘	↘ ∪	↗	↗

(10) ~~00~~

$(-\infty, 0]$, $[\frac{4}{3}, 2)$ හා $(2, \infty)$ මත වැඩි වේ.

$[0, 1)$ හා $(1, \frac{4}{3}]$ මත අඩු වේ.

$(0, \frac{4}{3})$ ප්‍රාන්තර එකතු කර්ලා නම් (-10)

$(\frac{4}{3}, \infty)$ " " " " (-10)

50

(0, 1) හිදී ස්ථානීය උපරිමයකි. (5)

$(\frac{4}{3}, 9)$ හිදී ස්ථානීය අවමයකි. (5)

} ප්‍රශ්නාරයේ ලකුණු නර ඇත්නම් ලකුණු දෙන්න.

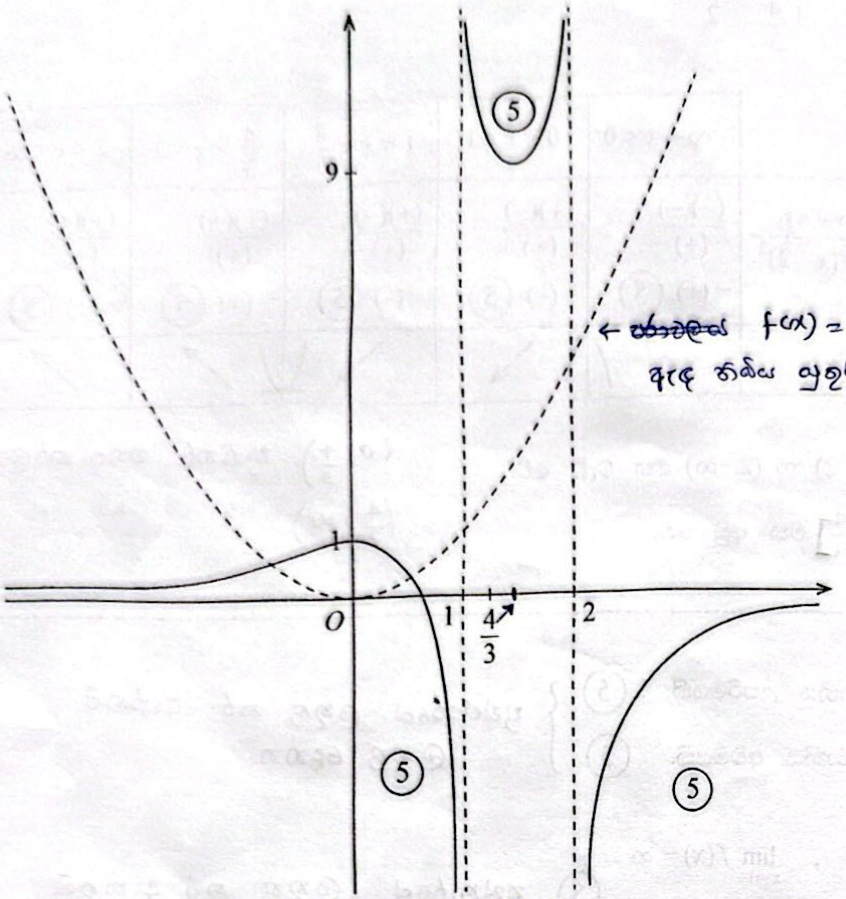
$\lim_{x \to 1-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to 1+} f(x) = \infty$

$\lim_{x \to 2-} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to 2+} f(x) = -\infty$

(5) ප්‍රශ්නාරයේ ලකුණු නර ඇත්නම් ලකුණු දෙන්න.

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$. (5) ප්‍රශ්නාරයේ ලකුණු නර ඇත්නම් ලකුණු දෙන්න.

Scanned with CamScanner



← ~~ඉහළින්~~ $f(x) = x^2$ ඇඳ නිවැරදි පුළුවන්.

හැඩ සඳහා ලකුණු දීමට අගයන් නිවැරදි පුළුවන.

35

$x^2(x-1)(x-2) = 2 - 3x$

$\Leftrightarrow x^2 = \dfrac{2-3x}{(x-1)(x-2)}$ (5) සහෝ නිරීමට

$\Leftrightarrow x^2 = f(x)$

$\therefore$ තාත්ත්වික විසඳුම් ගණන = 2. (5)

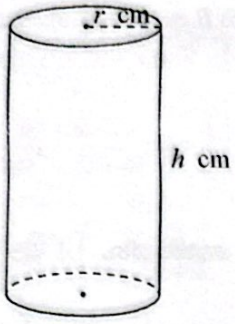
විසඳුම් ගණන ලියා නොමැති වුවත්

$f(x) = x^2$ ඇඳ ඇති නම් ලකුණු දෙන්න.

10

Scanned with CamScanner

(b)



$S = 2\pi rh + 2\pi r^2$

$\pi r^2 h = 1024\pi$

$\therefore \quad h = \frac{1024}{r^2}$ (5)

$\therefore \quad S = 2\pi r\left\{\frac{1024}{r^2}\right\} + 2\pi r^2$

$= 2\pi\left(\frac{1024}{r} + r^2\right)$ (5)

10

$\frac{dS}{dr} = 2\pi\left(-\frac{1024}{r^2} + 2r\right)$ (5)

$\frac{dS}{dr} = 0$ (5) $\Leftrightarrow \quad \frac{1024}{r^2} = 2r$

$\Leftrightarrow r^3 = 512$

$\Leftrightarrow r = 8.$ (5)

$0 < r < 8$ සඳහා $\frac{dS}{dr} < 0$ වේ.

$r > 8$ සඳහා $\frac{dS}{dr} > 0$ වේ.

$\therefore$ S අවම වන්නේ $r = 8$ විට ය. (5) ඇවමයන් බව පෙන්වීම

20

$\frac{d^2S}{dr^2}$ හෝ $r = 8$ ඇතුළතයෙන්,

$\frac{d^2S}{dr^2} > 0$ බව පෙන්වීමට මෙම ලකුණු දෙන්න.

Scanned with CamScanner

15.(*a*) සියලු $t \in \mathbb{R}$ සඳහා $3t^2+4 = A(t^2-2t+4) + Bt(t+1)$ වන පරිදි A හා B තාත්ත්වික නියතයන්හි අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $\int \frac{3t^2+4}{(t+1)(t^2-2t+4)}\,dt$ සොයන්න.

(*b*) $u = x+\sqrt{x^2+3}$ ආදේශය භාවිතයෙන්, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}dx = \frac{1}{2}\ln 3$ බව පෙන්වන්න.

$J = \int_0^1 \sqrt{x^2+3}\,dx$ යැයි ගනිමු. කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $2J = 2 + \int_0^1 \frac{3}{\sqrt{x^2+3}}dx$ බව පෙන්වන්න.

$J = 1 + \frac{3}{4}\ln 3$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(*c*) a නියතයක් වන $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$ සූත්‍රය භාවිතයෙන් $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\right)dx = \frac{\pi}{8}\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ බව පෙන්වන්න.

(*a*) $3t^2+4 = A(t^2-2t+4) + Bt(t+1)$

$= (A+B)t^2 + (-2A+B)t + 4A$ (5)

t^2 හි සංගුණක : $3 = A+B$

t^1 හි සංගුණක : $0 = -2A+B$

t^0 හි සංගුණක : $4 = 4A$

සමීකරණ 2ක් නිසිම ප්‍රමාණවත්

$\therefore A = 1$ හා $B = 2$.

(5) (5)

Scanned with CamScanner

$\therefore \frac{3t^2+4}{(t+1)(t^2-2t+4)} = \frac{1}{t+1} + \frac{2t}{t^2-2t+4}$. (10) වරදී A හා B සඳහා මෙය නොවේ.

$$\int \frac{3t^2+4}{(t+1)(t^2-2t+4)}\,dt = \int \left\{\frac{1}{t+1} + \frac{2t-2+2}{t^2-2t+4}\right\} dt$$

$$= \int \frac{1}{t+1}\,dt + \int \frac{2t-2}{t^2-2t+4}\,dt + 2\int \frac{1}{(t-1)^2+3}\,dt$$

$= \ln|t+1| + \ln|t^2-2t+4| + \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{t-1}{\sqrt{3}}\right) + C$, (5) ඇතුළ සම්පූර්ණ පිළිතුරට A හා B වරදී නම් මෙම (5) නොවේ.

(5) (5) (5)

මෙහි C යනු අභිමත නියතයකි.

30

(b) $u = x + \sqrt{x^2+3}$.

$$\frac{du}{dx} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} = \frac{u}{\sqrt{x^2+3}}$$ (5)

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}\,dx = \frac{1}{u}\,du$$

$x = 0 \Rightarrow u = \sqrt{3}$.
$x = 1 \Rightarrow u = 3$. } (5)

$$\text{So, } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}\,dx = \int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{1}{u}\,du = \ln|u|\Big|_{\sqrt{3}}^{3} = \ln 3 - \ln\sqrt{3}$$

(5) (5)

$$= \ln\sqrt{3} = \frac{1}{2}\ln 3$$ (5)

25

$$J = \int_0^1 \sqrt{x^2+3}\,dx = x\sqrt{x^2+3}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+3}}\,dx$$ (10)

$$= 2 - \int_0^1 \frac{x^2+3-3}{\sqrt{x^2+3}}\,dx$$ (5)

Scanned with CamScanner

$\therefore J = 2\int_0^1 \sqrt{x^2+3}\,dx + \int_0^1 \frac{3}{\sqrt{x^2+3}}\,dx$ (10)

$\Rightarrow 2J = 2 + \int_0^1 \frac{3}{\sqrt{x^2+3}}\,dx.$ (5)

30

$\therefore J = 1 + \frac{3}{2}\ln 3$

$= 1 + \frac{3}{4}\ln 3$ (10)

10

(c) Let $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{\cos x}{\cos x + \sin x}\right)dx.$

Then $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}\right)dx$ (5)

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{\cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x}{\cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x + \sin\frac{\pi}{4}\cos x - \cos\frac{\pi}{4}\sin x}\right)dx$ (10)

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{\cos x + \sin x}{2\cos x}\right)dx$ (5)

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{1}{2}\right)dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{\cos x}{\cos x + \sin x}\right)dx$ (10)

$\therefore = I \quad \ln\left(\frac{1}{2}\right)x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - I.$ (5)

$\Rightarrow 2I = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{4}$

$\therefore I = \frac{\pi}{8}\ln\left(\frac{1}{2}\right).$ (5)

Scanned with CamScanner

16. $A \equiv (1, 2)$ හා $B \equiv (a, b)$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a, b \in \mathbb{R}$ වේ. AB රේඛා ඛණ්ඩයේ l ලම්බ සමච්ඡේදකයේ සමීකරණය $x + y - 4 = 0$ බව දී ඇත. a හා b හි අගයන් සොයන්න.

$C \equiv (3, 1)$ යැයි ගනිමු. C ලක්ෂ්‍යය l රේඛාව මත පිහිටන බව පෙන්වා $A\hat{C}B$ සොයන්න.

A, B හා C ලක්ෂ්‍ය හරහා යන වෘත්තය S යැයි ගනිමු. S හි කේන්ද්‍රය $\left(\frac{13}{6}, \frac{11}{6}\right)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වා S හි සමීකරණය සොයන්න.

ඒ නයින්, A, B ලක්ෂ්‍ය හා $D \equiv (0, 3)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන වෘත්තයෙහි සමීකරණය සොයන්න.

AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය $\equiv \left(\frac{1+a}{2}, \frac{2+b}{2}\right)$. (5)

මෙම ලක්ෂ්‍යය l මත පිහිටයි.

$\therefore \frac{1+a}{2} + \frac{2+b}{2} - 4 = 0$

$\therefore a + b = 5$ ——— ① (5)

තවද l යන්න AB ට ලම්බක වේ.

(5)

$\therefore \left(\frac{b-2}{a-1}\right) \times (-1) = -1$. (5)

$\therefore b - 2 = a - 1$

$\therefore b - a = 1$ ——— ② (5)

දැන්, ① හා ② මගින් $a = 2$ හා $b = 3$ ලැබේ.

(5) (5)

එවිට, $A \equiv (1, 2)$, $B \equiv (2, 3)$ හා $C \equiv (3, 1)$.

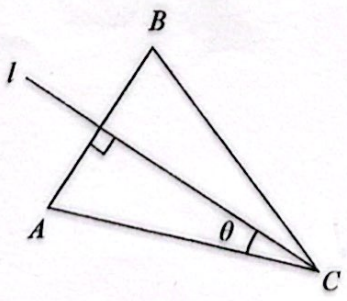
35

~~Substitute~~ $x = 3$ හා $y = 1$, $x + y - 4 = 0$ හි ආදේශ කරමු. (5)

ව.පැ. $= 3 + 4 - 1$

$= 0 =$ ද.පැ.

$\therefore l$ මත C පිහිටයි. (5)



Scanned with CamScanner

AC හා l අතර කෝණය θ යැයි ගනිමු.

එවිට θ සුළු කෝණයකි.

AC හි අනුක්‍රමණය $= \frac{1}{2}$. (5)

$$\tan\theta = \left|\frac{-\frac{1}{2}-(-1)}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)\times(-1)}\right| = \frac{1}{3} \quad (10)$$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$. (5)

$\therefore A\hat{C}B = 2\theta \quad 2\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$. (5) (තුළව දක්නර සඳහා ලඳුනු ලකා දෙන්න) 35

AC හි ලම්බ සමච්ඡේදකය m යැයි ගනිමු.

m හි අනුක්‍රමණය $= 2$ වේ. (5)

AC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය $\equiv \left(2, \frac{3}{2}\right)$. (5)

m හි සමීකරණය : $y - \frac{3}{2} = 2(x-2)$ (5)

එනම් $y - 2x + \frac{5}{2} = 0$.

S හි කේන්ද්‍රය l හා m හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය වේ. (5)

$x + y - 4 = 0$ හා $y - 2x + \frac{5}{2} = 0$ සමගාමීව විසඳීමෙන්, (5)

$3x = 4 + \frac{5}{2}$ අපට ලැබේ.

$\therefore x = \frac{13}{6}$ හා $y = 4 - \frac{13}{6} = \frac{11}{6}$.

$x = \frac{13}{6}$ (5) (5)

$\therefore S$ හි කේන්ද්‍රය $\equiv \left(\frac{13}{6}, \frac{11}{6}\right)$.

S හි අරය $= \sqrt{\left(\frac{13}{6}-1\right)^2 + \left(\frac{11}{6}-2\right)^2}$ (10) / (00)

$= \sqrt{\frac{49}{36} + \frac{1}{36}}$

$= \sqrt{\frac{25}{18}}$ (5)

Scanned with CamScanner

$\therefore$ S හි සමීකරණය : $\left(x-\frac{13}{6}\right)^2+\left(y-\frac{11}{6}\right)^2=\frac{25}{18}$. (10)

$x^2+y^2-\frac{13}{3}x-\frac{11}{3}y+\frac{20}{3}=0$

60

$\therefore$ AB හි සමීකරණය : $y-2=1(x-1)$ (5)

එනම් $x-y+1=0$

A හා B හරහා යන ඕනෑම වෘත්තයක සමීකරණය $\underbrace{\left(x-\frac{13}{6}\right)^2+\left(y-\frac{11}{6}\right)^2-\frac{25}{18}}_{S}+\lambda(x-y+1)=0$, මගින් දෙනු ලැබේ; මෙහි $\lambda \in \mathbb{R}$. (10)

$S+\lambda(l)=0$

මෙය $D \equiv (0, 3)$, හරහා යෑමට $\left(\frac{13}{6}\right)^2+\left(\frac{7}{6}\right)^2-\frac{25}{18}+\lambda(-2)=0$ විය යුතු ය.

$\lambda=\frac{21}{9}=\frac{7}{3}$ (5) ෆ බොයා ඇත ඒට සමපුර්ණ ලකුණු දෙන්න.

$\therefore$ අවශ්‍ය සමීකරණය $x^2+y^2-2x-6y+9=0$.

20

Scanned with CamScanner

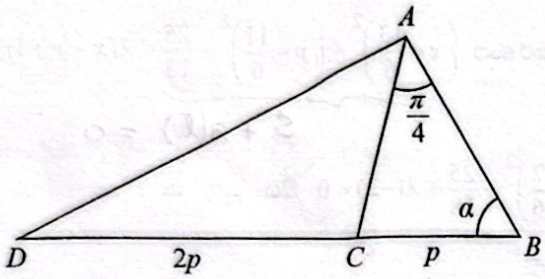
17. (*a*) $6\cos 2x - 8\sin 2x$ යන්න $R\cos(2x+\alpha)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $R > 0$ හා $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ වේ.

ඒ නයින්, $6\cos 2x - 8\sin 2x = 5$ විසඳන්න.

$24\cos^2 x - 32\sin x\cos x$ යන්න $a\cos 2x + b\sin 2x + c$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $a, b, c (\in \mathbb{R})$ නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

$24\cos^2 x - 32\sin x\cos x$ හි අවම අගය **අපෝහනය** කරන්න.

(*b*)



රූපයෙහි පෙන්වා ඇති ABC ත්‍රිකෝණයෙහි $BC = p$, $B\hat{A}C = \frac{\pi}{4}$ හා $A\hat{B}C = \alpha$ වේ. දික් කළ BC රේඛාව මත D පිහිටා ඇත්තේ $CD = 2p$ වන පරිදි ය.

$AB = p(\cos\alpha + \sin\alpha)$ බව පෙන්වන්න.

p හා α ඇසුරෙන් AD^2 සොයන්න.

$AD = 3p$ නම් $\alpha = \tan^{-1}(5)$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(*c*) $\tan^{-1}(x+1) + \tan^{-1}(x-1) = \sin^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ සමීකරණය විසඳන්න.

(*a*) $6\cos 2x - 8\sin 2x \qquad \sqrt{6^2+8^2} = 10$

$= 10\left(\frac{6}{10}\cos 2x - \frac{8}{10}\sin 2x\right)$ (5)

$= 10\left(\frac{3}{5}\cos 2x - \frac{4}{5}\sin 2x\right)$

$= 10(\cos\alpha\cos 2x - \sin\alpha\sin 2x)$, මෙහි $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ යන්න $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ හා $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ වන පරිදි වේ. (5)

(5)

$= 10\cos(2x+\alpha)$. ← (5)

$\therefore R = 10$ and $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$. (5)

25

Scanned with CamScanner

$6\cos 2x - 8\sin 2x = 5$

$10\cos(2x+\alpha) = 5$ (5)

$\therefore \cos(2x+\alpha) = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$ (5)

$2x+\alpha = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$; මෙහි $n \in \mathbb{Z}$. (5)

$\therefore x = n\pi - \frac{\alpha}{2} \pm \frac{\pi}{6}$; මෙහි $n \in \mathbb{Z}$. (5)

$n \in \mathbb{Z}$ නිවැරදි අවශ්‍ය වේ.

[20]

$24\cos^2 x - 32\sin x\cos x$

$= 24\left(\frac{\cos 2x+1}{2}\right) - 32 \times \frac{1}{2}\sin 2x$ (5) (5) (10) ආදේශය 2ට (5)+(5)

$= 12\cos 2x - 16\sin 2x + 12$

$\therefore a = 12, \quad b = -16$ හා $c = 12$. (5)

[15]

$24\cos^2 x - 32\sin x\cos x$

$= 12\cos 2x - 16\sin 2x + 12$

$= 2(6\cos 2x - 8\sin 2x) + 12$

$= 20\cos(2x+\alpha) + 12$ (5)

අවමය $= -1$

$\therefore$ අවශ්‍ය අවමය $= -20 + 12$

$= -8$. (5)

[10]

Scanned with CamScanner

(*b*) $\triangle ABC$ සඳහා සයින් නීතිය :

$$\frac{AB}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=\frac{p}{\sin\frac{\pi}{4}} \quad (10)/(00)$$

$$\therefore \quad AB=\sqrt{2}p\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right) \leftarrow (5)\ \text{ප්‍රමාණයට}$$

$$=\sqrt{2}p\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha\right)$$

$$=p(\cos\alpha+\sin\alpha). \quad (5)$$

20

$\triangle ABD$ සඳහා කොසයින් නීතිය :

$$AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cos\alpha \quad (5)$$

$$=p^2(\cos\alpha+\sin\alpha)^2+9p^2-2p(\cos\alpha+\sin\alpha)\left(3p\cos\alpha\right) \quad (5)$$

$AD=3p$ යැයි සිතමු.

එවිට $9p^2=p^2(\cos\alpha+\sin\alpha)^2+9p^2-6p^2(\cos\alpha+\sin\alpha)\cos\alpha$ (5)

$$\therefore \ (\cos\alpha+\sin\alpha)^2-6(\cos\alpha+\sin\alpha)\cos\alpha=0$$

$$\Rightarrow \quad \cos\alpha+\sin\alpha=6\cos\alpha \quad (5) \quad \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \sin\alpha=5\cos\alpha$$

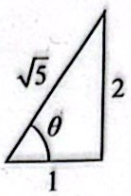
$$\Rightarrow \quad \tan\alpha=5$$

$$\Rightarrow \quad \alpha=\tan^{-1}(5). \quad (5)$$

25

Scanned with CamScanner

(c) $\sin^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \tan^{-1}(2)$. (5)



Let $\alpha = \tan^{-1}(x+1)$ හා $\beta = \tan^{-1}(x-1)$ යැයි ගනිමු.

$\alpha + \beta = \tan^{-1}(2)$ (5)

$\Rightarrow \tan(\alpha+\beta) = 2$ (5) tan දෙපැත්තම

$\Rightarrow \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = 2$ (5) ප්‍රසාරණය

$\Rightarrow \frac{x+1+x-1}{1-(x^2-1)} = 2$ (5) $\Rightarrow x = 2 - x^2$

$\Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$

$\Rightarrow (x-1)(x+2) = 0$

$x = 1$ or $x = -2$. (5)

$x = -2$ විසඳුමක් නොවේ. $x = 1$ විසඳුමකි.

$\therefore x = 1$. (5) $x = -2$ ඉවත් කිරීමට

35

Scanned with CamScanner