අ.පො.ස. (උ.පෙළ) විභාගය - 2024

10 - සංයුක්ත ගණිතය II

ලකුණු බෙදී යාමේ ආකාරය

II පත්‍රය

A කොටස $10 \times 25 = 250$

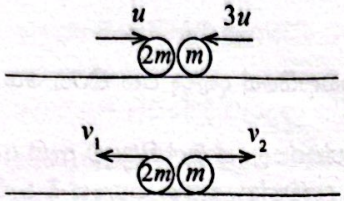
B කොටස $05 \times 150 = 750$

එකතුව $= \frac{1000}{10}$

II පත්‍රය අවසාන ලකුණු = 100

Scanned with CamScanner

1. ස්කන්ධය $2m$ වූ A අංශුවක් හා ස්කන්ධය m වූ B අංශුවක් සුමට තිරස් මේසයක් මත එකම සරල රේඛාවක් දිගේ පිළිවෙළින් u හා $3u$ වේගවලින් එකිනෙක දෙසට චලනය වෙමින් සරල ලෙස ගැටේ. ගැටුමෙන් පසු A හා B ප්‍රතිවිරුද්ධ දිශාවලට චලනය වේ. A හා B අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය e වේ. $e > \frac{1}{8}$ බව පෙන්වන්න.



පද්ධතිය සඳහා $\mathbf{I} = \Delta(m\mathbf{v})$: $\rightarrow$ ගමන්න සංඛ්‍යාව නියමයට ලකුණ දෙන්න

$$0 = -2mv_1 + mv_2 - (2mu - 3mu) \leftarrow (5)$$

$$2v_1 - v_2 = u \quad \text{----------} (1)$$

නිව්ටන්ගේ ප්‍රත්‍යාගති නියමයෙන්:

$$v_2 + v_1 = e(u + 3u) \leftarrow (5)$$

$$v_1 + v_2 = 4eu \quad \text{----------} (2)$$

(1) හා (2) $\Rightarrow 3v_1 = u + 4eu$

$$\therefore v_1 = \frac{1}{3}(1 + 4e)u > 0 \leftarrow (5)$$

$$-3v_2 = u - 8eu$$

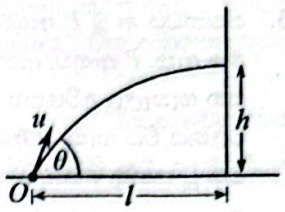
$$\therefore v_2 = \frac{1}{3}(8e - 1)u \leftarrow (5)$$

$v_2 > 0$ සඳහා $e > \frac{1}{8}$ විය යුතු ය. $\leftarrow (5)$

Scanned with CamScanner

2. තිරස් ගෙබිමක් මත වූ O ලක්ෂ්‍යයක සිට u ආරම්භක වේගයකින් තිරසට $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයකින් අංශුවක් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. අංශුව, O සිට l තිරස් දූරකින් පිහිටි තිරස් තාප්පයක, ගෙබිමේ සිට $h\,(>0)$ උසකින් ගැටේ (රූපය බලන්න).

$h=l\tan\theta-\frac{gl^2}{2u^2}\sec^2\theta$ බව පෙන්වා $\sin 2\theta>\frac{gl}{u^2}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.



$S=ut\ \ \frac{1}{2}at^2:\ \rightarrow\ l=u\cos\theta\, t\ \leftarrow (5)$

$\uparrow\ h=u\sin\theta\, t-\frac{1}{2}gt^2\ \leftarrow (5)$

$\therefore\ h=u\sin\theta\left(\frac{l}{u\cos\theta}\right)-\frac{1}{2}g\left(\frac{l^2}{u^2\cos^2\theta}\right)$

$\Rightarrow\ h=l\tan\theta-\frac{gl^2}{2u^2}\sec^2\theta$ (5) ආදේශයට

$h>0\ \Rightarrow\ l\tan\theta>\frac{gl^2}{2u^2}\sec^2\theta\ \leftarrow (5)$

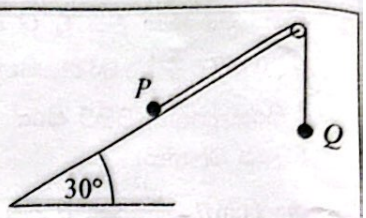
$\Rightarrow\ \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}>\frac{gl}{u^2}$

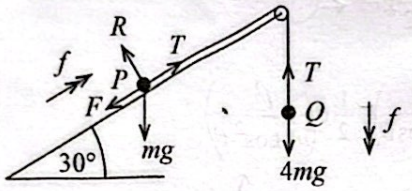
$\Rightarrow\ \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}>\frac{gl}{u^2}$

$\Rightarrow\ \sin 2\theta>\frac{gl}{u^2}.$ (5)

Scanned with CamScanner

3. ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් තිරසට ආනතිය $30°$ ක් වූ රළු ආනත තලයක් මත ඇත. P අංශුව, ආනත තලයේ ඉහළින් වූ අචල සුමට කප්පියක් මතින් යන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින් ස්කන්ධය $4m$ වූ සිරස්ව නිදහසේ චලනය විය හැකි Q අංශුවකට ඇඳා ඇත (රූපය බලන්න). ආනත තලය මත වූ තන්තු කොටස තලයේ උපරිම බෑවුම් රේඛාවක් දිගේ පිහිටා ඇත. P හා තලය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය $\frac{1}{2}$ වේ. තන්තුව තදව ඇතිව පද්ධතිය නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. P, ආනත තලයේ ඉහළට චලනය වන බව දී ඇත. තන්තුවේ ආතතිය නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලබාගන්න.





(5) - බල සඳහා
(P හා Q සඳහා
නියම බල)

$F = ma$:

(P) ↖ $R - mg\cos 30° = 0$ ← (5)

$\therefore\ R = \frac{\sqrt{3}}{2}mg$

$F = \frac{1}{2}R = \frac{\sqrt{3}}{4}mg$ ← (5) මෙතන ලඟුව දෙන්න.
R තෙර යොයා ඇති නිසා.

(P) ↗ $T - F - mg\cos 60° = mf$ ← (5)

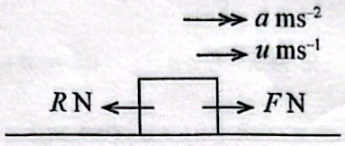
$\therefore\ T - F - \frac{mg}{2} = mf$

(Q) ↓ $4mg - T = 4mf$ ← (5)

Scanned with CamScanner

4. ස්කන්ධය M kg වූ මෝටර් රථයක්, එහි එන්ජිම P W නියත ජවයකින් ක්‍රියා කරමින්, තිරස් සෘජු මාර්ගයක් දිගේ ගමන් කරයි. කාරයෙහි චලිතයට R N නියත ප්‍රතිරෝධයක් ඇත. එහි වේගය u m s^{-1} වන මොහොතෙහිදී, කාරයෙහි ත්වරණය සොයන්න.

දැන්, මෝටර් රථය, තිරසට $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයකින් ආනත සෘජු මාර්ගයක් දිගේ ඉහළට නියත වේගයකින් ගමන් කරයි. කාරය, එම R N ප්‍රතිරෝධයටම යටත්ව එම P W ජවයම ඇතිව ක්‍රියා කරයි නම්, මෙම නියත වේගය සොයන්න.



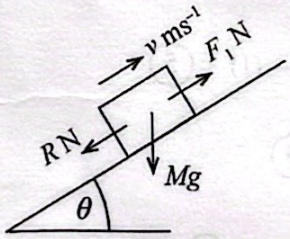
$P = F \cdot u$

$\therefore F = \frac{P}{u}$ (5) සමීකරණයටන් දෙන්න

$F = ma$: →

$F - R = M \cdot a$ (5)

$\therefore a = \frac{1}{M}\left(\frac{P}{u} - R\right)$ ms^{-2}. (5) න්‍යරණයට



$P = F_1 \ v$:

$\therefore F_1 = \frac{P}{v}$

$F = ma$: ↗ $F_1 - R - Mg\sin\theta = 0$ (5)

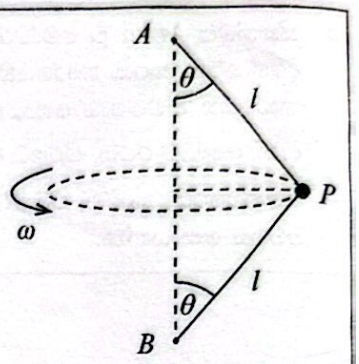
$\frac{P}{v} = R + Mg\sin\theta$

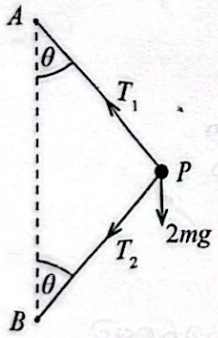
$\therefore v = \frac{P}{R + Mg\sin\theta}$ ms^{-1}. (5)

Scanned with CamScanner

5. ස්කන්ධය $2m$ වූ P අංශුවක්, සිරස් රේඛාවක් මත පිහිටි A හා B අචල ලක්ෂ්‍ය දෙකකට, එක එකක දිග l වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තු දෙකක් මගින් ඇඳා ඇත. රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි තන්තු දෙකම තදව හා සිරස සමඟ θ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයක් සාදමින් ω නියත කෝණික ප්‍රවේගයකින් P අංශුව තිරස් වෘත්තයක චලනය වේ.

AP තන්තුවේ ආතතිය $m(l\omega^2 + g\sec\theta)$ බව පෙන්වන්න.





බල ලකුණු නිවැරදි
ලකුණු දී නැත

$F = ma$:

(P) ↑ $T_1\cos\theta - T_2\cos\theta - 2mg = 0$ (5)

$\therefore\ T_1 - T_2 = 2mg\sec\theta$ ----------(1) (5)

(P) ← $T_1\sin\theta + T_2\sin\theta = 2ml\sin\theta\,\omega^2$ (5)

$\therefore\ T_1 + T_2 = 2ml\omega^2$ ----------(2) (5)

(1) හා (2) ⇒ $2T_1 = 2mg\sec\theta + 2ml\omega^2$

$\therefore\ T_1 = m(l\omega^2 + g\sec\theta)$. (5)

Scanned with CamScanner

6. $\mathbf{u}$ හා $\mathbf{v}$ යනු $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\frac{1}{2}$ වන පරිදි වූ ඒකක දෛශික දෙකක් යැයි ගනිමු. $\mathbf{a}=\alpha\mathbf{u}+\mathbf{v}$ හා $\mathbf{b}=\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}$ යැයි ද ගනිමු. මෙහි $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ වේ. $\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ දෛශික ලම්බ ද $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ යන්න $\mathbf{u}$ ට සමාන්තර ද නම් α හා β හි අගයන් සොයන්න.

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=(\alpha\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\beta\mathbf{v})$

$0=\alpha\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}+\alpha\beta\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}+\beta\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$

$0=\alpha+\alpha\beta\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\beta$ ---------- (1) (5)

$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\lambda\mathbf{u}$; මෙහි $\lambda\in\mathbb{R}$. ---------- (2)

$(2)\cdot\mathbf{u}\Rightarrow(\alpha\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot\mathbf{u}+(\mathbf{u}+\beta\mathbf{v})\cdot\mathbf{u}=\lambda\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$

$\alpha+\frac{1}{2}+1+\beta\cdot\frac{1}{2}=\lambda$ ---------- (3) (5)

$(2)\cdot\mathbf{v}\Rightarrow(\alpha\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot\mathbf{v}+(\mathbf{u}+\beta\mathbf{v})\cdot\mathbf{v}=\lambda\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$

$\frac{\alpha}{2}+1+\frac{1}{2}+\beta=\frac{\lambda}{2}$ ---------- (4) (5)

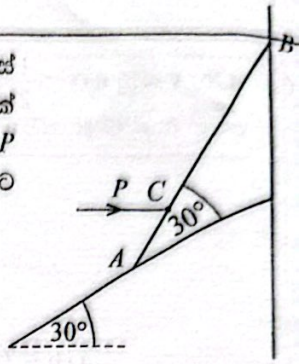
(3) හා (4) $\Rightarrow$ $\alpha+\frac{3}{2}+\frac{\beta}{2}=\alpha+3+2\beta$

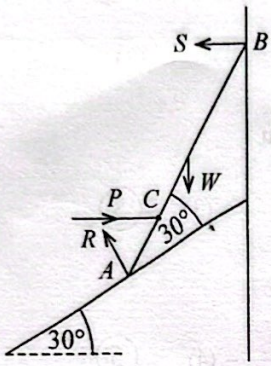
$\Rightarrow$ $\beta=-1$. (5)

දැන්, (1) $\Rightarrow$ $\alpha=1$. (5)

Scanned with CamScanner

7. දිග $4a$ හා බර W වූ ඒකාකාර AB දණ්ඩක් එහි B ඉහළ කෙළවර සුමට සිරස් බිත්තියකට එරෙහිව ද A පහළ කෙළවර 30° කින් තිරසට ආනත සුමට තලයක් මත ද ඇතිව සමතුලිතතාවයේ තබා ඇත්තේ $AC = a$ වන C ලක්ෂ්‍යයෙහිදී P තිරස් බලයක් දණ්ඩට යෙදීමෙනි. රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි, දණ්ඩ ආනත තලයට 30° කින් ආනත වේ. P හි අගය සොයන්න.





(5) බල සඳහා

$\rightarrow$ $P - S - R\sin 30^\circ = 0$ (5)

$\therefore\ P = S + \frac{R}{2}$

$\uparrow$ $R\cos 30^\circ - W = 0$ (5)

$\therefore\ R = \frac{2W}{\sqrt{3}}$

$\circlearrowleft_A$ $P \times a\sin 60^\circ + W \times 2a\cos 60^\circ - S \times 4a\sin 60^\circ = 0$ (5)

$P \times \frac{\sqrt{3}}{2} + W - \left(P - \frac{R}{2}\right)2\sqrt{3} = 0$

$\sqrt{3}P + 2W - 4\sqrt{3}P + \frac{2W}{\sqrt{3}} \times 2\sqrt{3} = 0$

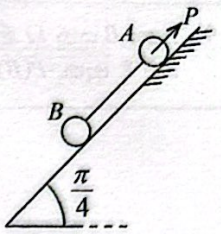
$3\sqrt{3}P = 6W.$

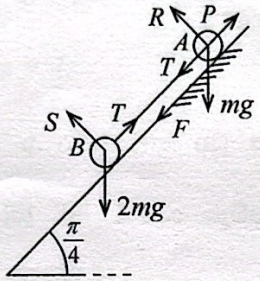
$P = \frac{2W}{\sqrt{3}}.$ (5)

Scanned with CamScanner

8. රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි, ස්කන්ධ පිළිවෙළින් m හා $2m$ වූ A හා B අංශු 2ක් තිරසට $\frac{\pi}{4}$ කෝණයකින් ආනත වූ තලයක් මත තබා සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් ඈඳා සමතුලිතතාවයේ තබා ඇත්තේ A ට යෙදූ P බලයක් මගිනි. P හි ක්‍රියා රේඛාව හා තන්තුව, තලයේ උපරිම බෑවුම් රේඛාවක් දිගේ පිහිටයි. A අංශුව තලයේ රළු කොටස මත පිහිටන අතර B අංශුව තලයේ සුමට කොටස මත පිහිටයි. A හා තලය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය $\frac{1}{2}$ වේ.

$2\left|\sqrt{2}\,P-3mg\right| \le mg$ බව පෙන්වන්න.





(5) බල සඳහා

පද්ධතිය සඳහා: ↗ $P-F-mg\sin\frac{\pi}{4}-2mg\sin\frac{\pi}{4}=0.$ (5)

$\therefore\ F=P-3mg\ \frac{1}{\sqrt{2}}$

(A) ↖ $R-mg\cos\frac{\pi}{4}=0$ (5)

$\therefore\ R=\frac{mg}{\sqrt{2}}$

සමතුලිතතාව සඳහා:

$\frac{1}{2}\ge\frac{|F|}{R}$ (5) (අවශ්‍යතාවය)

$\therefore\ \left|P-\frac{3mg}{\sqrt{2}}\right|\le\frac{mg}{2\sqrt{2}}$ (5)

$\therefore\ 2\left|\sqrt{2}P-3mg\right|\le mg.$

Scanned with CamScanner

9. A හා B යනු Ω නියැදි අවකාශයක වූ සිද්ධි දෙකක් යැයි ගනිමු. $P(A) = \frac{1}{5}$, $P(A \mid B) = \frac{1}{10}$ හා $P(B \mid A) = \frac{3}{10}$ බව දී ඇත. $P(B)$ හා $P(A \cup B)$ සොයන්න.

$P(B \mid A) = \frac{3}{10}$

$\therefore \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{3}{10}$ (5)

$\therefore P(B \cap A) = \frac{3}{10} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{50}$ ← (5)

$P(A \mid B) = \frac{1}{10}$

$\therefore \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{10}$ (5)

$\therefore P(B) = 10 \times P(A \cap B) = 10 \times \frac{3}{50} = \frac{3}{5}$ (5)

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{1}{5} + \frac{3}{5} - \frac{3}{50} = \frac{37}{50}$. (5) අගයන් සඳහා

Scanned with CamScanner

10. ආරෝහණ පටිපාටියට සැකසූ, පහත දැක්වෙන නිරීක්ෂණ හතෙහි මධ්‍යස්ථය, මාතය හා මධ්‍යනාය පිළිවෙළින් 5, 7 හා 5 වේ:

1, 3, 4, p, q, r, s

මෙහි p, q, r හා s තාත්ත්වික සංඛ්‍යා වේ.

p, q, r හා s හි අගයන් සොයා, නිරීක්ෂණ හතෙහි විචලතාව $\frac{38}{7}$ බව පෙන්වන්න.

මධ්‍යස්ථය = 5.

$\therefore\ p = 5.$ ← (5)

මාතය = 7.

$\therefore$ q, r, s වලින් අඩු තරමින් දෙකක්වත් 7 ඒවා විය යුතු ය. ← (5)

ඒවායින් 2ක් 7 ඒවා යැයිද, අනෙක් එක a යැයිද ගනිමු.

මධ්‍යනාය = 5

$\therefore\ 5 = \frac{1+3+4+5+7+7+a}{7}$ ← (5)

$35 = 27 + a$

$\therefore\ a = 8.$

එනම්, $q = r = 7$ හා $s = 8.$ (5)

විචලතාව = $\frac{1}{7}\left[(1-5)^2 + (3-5)^2 + (4-5)^2 + (5-5)^2 + 2(7-5)^2 + (8-5)^2\right]$

$= \frac{1}{7}[16+4+1+8+9] = \frac{38}{7}.$ (5)

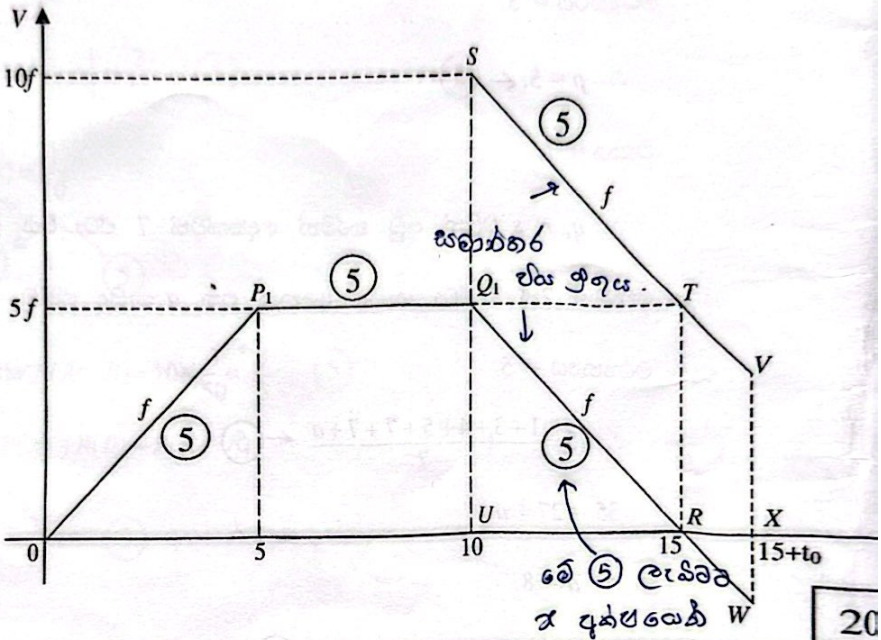
Scanned with CamScanner

11. (a) සෘජු මාර්ගයක වූ O ලක්ෂ්‍යයක සිට කාලය $t = 0$ s හිදී නිශ්චලතාවයෙන් ගමන් ආරම්භ කරන P මෝටර් රථයක් f m s^{-2} නියත ත්වරණයකින් තත්පර 5 ක් ගමන් කරයි. පසුව එය $t = 5$ s හිදී ලබාගත් නියත වේගයෙන් තවත් තත්පර 5 ක් ගමන් කර $t = 10$ s හිදී f m s^{-2} ක නියත මන්දනයකින් මන්දනය වී A ලක්ෂ්‍යයකදී නිශ්චලතාවයට පැමිණේ. එසැණින් තම දිශාව වෙනස් කරන P මෝටර් රථය f m s^{-2} නියත ත්වරණයෙන්ම එම මාර්ගයේම නැවත O දෙසට ගමන් කරයි.

එම මාර්ගයේම O ලක්ෂ්‍යයේ සිට $t = 10$ s හිදී $10f$ m s^{-1} ක ආරම්භක වේගයෙන් ගමන් ආරම්භ කරන Q මෝටර් රථයක් f m s^{-2} නියත මන්දනයෙන් P මෝටර් රථය දෙසට ගමන් කරයි. A ලක්ෂ්‍යයේදී P නිශ්චලතාවයට පත්වන විට, P හා Q අතර දුර 125 m බව දී ඇත. එකම රූපසටහනක P හා Q හි චලිත සඳහා, $t = 0$ s සිට ඒවා මුණගැසෙන මොහොත දක්වා ප්‍රවේග-කාල ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න.

(i) $f = 10$,

(ii) P හා Q මෝටර් රථ $t = 17.5$ s හිදී මුණගැසෙන බව පෙන්වන්න.



20

A වෙත ළඟා වීමට P ගනු ලැබූ කාලය $= 15$ s (5)

(5) $t = 10$s සිට $t = 15$s දක්වා Q ගමන් කළ දුර

$= STRU$ වර්ගඵලය $= \frac{1}{2}(SU + TR) \times UR$ (5)

$= \frac{1}{2}(10f + 5f) \times 5$

$= \frac{75}{2} f$ m (5)

O සිට Aට දුර $= OP_1Q_1R$ වර්ගඵලය (5)

$= \frac{1}{2} \times (5 + 15) \times 5f = 50f$ m (5)

දත්තයෙන් : $125 = 50f - \frac{75}{2} f$ (5)

$250 = 25f$

$\therefore f = 10$ (5)

40

Scanned with CamScanner

$t=(15+t_0)s$ හිදී P හා Q හමු වන්නේ යැයි සිතමු.

ඔවුන් හමුවන්නේ $RTVX$ වර්ගඵලය + RWX වර්ගඵලය = 125 විටය. (5)

එනම් $RTVW$ වර්ගඵලය = 125 විටය.

$$TR\times RX = 125 \quad (5)$$

$$5f\times t_0 = 125 \quad (5)$$

$$50\times t_0 = 125$$

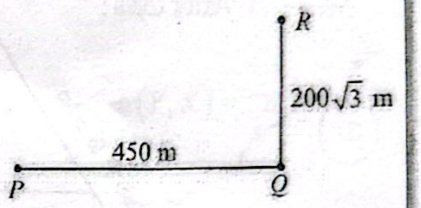
$$\therefore t_0 = \frac{125}{50} = 2.5s \quad (5)$$

$\therefore P$ හා Q හමුවන්නේ $t=(15+2.5)s$ විටය.

$$=17.5s. \quad (5)$$

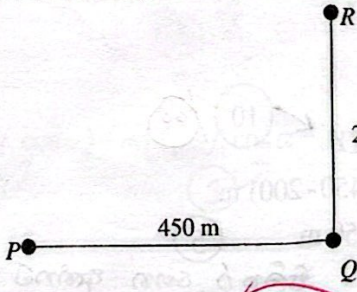
25

(b) P, Q සහ R බෝට්ටු තුනක් සරල රේඛීය පථවල ඒකාකාර වේගවලින් ගමන් කරයි. එක්තරා මොහොතකදී P බෝට්ටුවෙන් 450 m දුරක් නැගෙනහිරින් Q බෝට්ටුව පිහිටන අතර Q බෝට්ටුවෙන් $200\sqrt{3}$ m දුරක් උතුරින් R බෝට්ටුව පිහිටයි (රූපය බලන්න). P බෝට්ටුව, Q බෝට්ටුව හමුවීමේ අපේක්ෂාවෙන් යාත්‍රා කරන අතර Q බෝට්ටුව, R බෝට්ටුව හමුවීමේ අපේක්ෂාවෙන් යාත්‍රා කරයි.



P බෝට්ටුව තත්පර 45 කින් Q බෝට්ටුව හමුවන බවත්, Q බෝට්ටුව තත්පර 20 කින් R බෝට්ටුව හමුවන බවත් දී ඇත.

Q බෝට්ටුවට සාපේක්ෂව P බෝට්ටුවෙහි වේගය 10 m s^{-1} බව පෙන්වා Q බෝට්ටුව R බෝට්ටුව හමුවන මොහොතෙහිදී P බෝට්ටුව හා R බෝට්ටුව අතර දුර සොයන්න.



$$\underline{V}(P,Q)=\frac{450}{45}\text{ m s}^{-1}\rightarrow \quad (10) = (5)+(5)$$

$$=10\text{ m s}^{-1}\rightarrow \quad (5)$$

$\therefore Q$ ට සාපේක්ෂව P හි වේගය $=10\text{ m s}^{-1}$. (5)

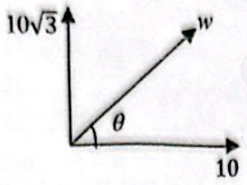
$$\underline{V}(Q,R)=\frac{200\sqrt{3}}{20}\text{ m s}^{-1}\uparrow \quad (10) = (5)+(5)$$

$$=10\sqrt{3}\text{ m s}^{-1}\uparrow \quad (5)$$

$\frac{450}{45} = 10\,ms^{-1}$
මෙය ඇත්නම් (15)
දෙන්න.
දිශාවට (5)
සහිව අවශ්‍ය වේ.

Scanned with CamScanner

$$\underline{V}(P,R) = \underline{V}(P,Q) + \underline{V}(Q,R) \quad (5)$$



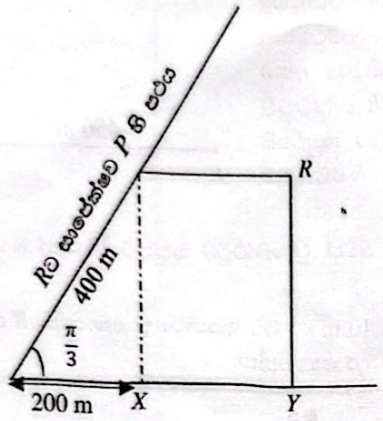
$$w = \sqrt{(10\sqrt{3})^2 + 10^2}$$
$$= 20 \text{ ms}^{-1} \quad (5)$$

නිවැරදි ප්‍රතිඵලය

$$\tan\theta = \frac{10\sqrt{3}}{10} = \sqrt{3}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \quad (5)$$ දිශාව

After 20 s :



අවශ්‍ය දුර $= XY$ (10) ✓✓

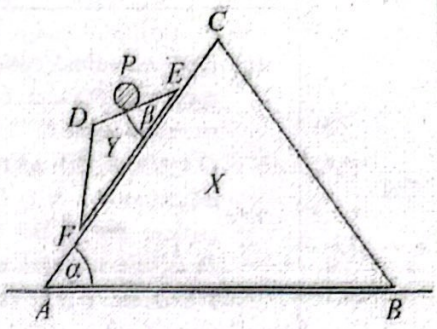
$= (450 - 200)$ m

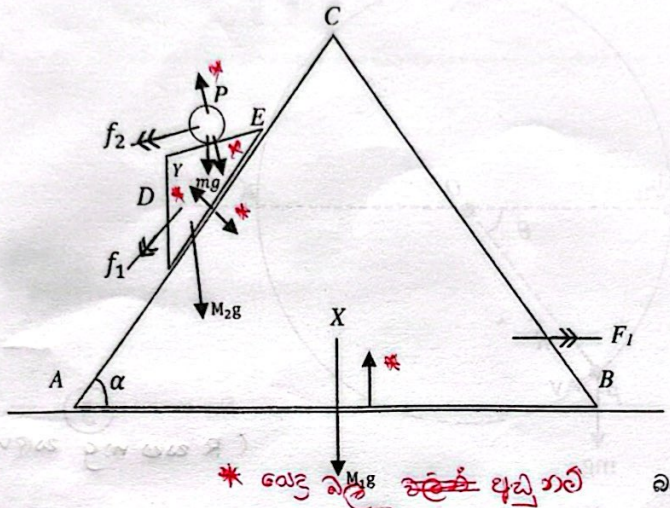
$= 250$ m. (5)

සම්පූර්ණ ගෙන ඇත්නම් (15) ම

දෙන්න -

12. (a) X, Y සුමට ඒකාකාර කුඤ්ඤ දෙකක හා P අංගුවක ස්කන්ධ කේන්ද්‍ර තුළින් වූ සිරස් හරස්කඩ, රූපයෙන් දැක්වේ. AC, DE හා EF රේඛා ඒවා අඩංගු මුහුණත්වල උපරිම බෑවුම් රේඛා වන අතර $B\hat{A}C = \alpha$ හා $D\hat{E}F = \beta\ (< \alpha)$ වේ. ස්කන්ධය M_1 වූ X කුඤ්ඤයේ AB අයත් මුහුණත සුමට තිරස් මෙසයක් මත තබා ඇත. ස්කන්ධය M_2 වූ Y කුඤ්ඤයේ EF අයත් මුහුණත X හි AC අයත් මුහුණත මත තබා ඇත. ස්කන්ධය m වූ P අංගුව DE මත තබා ඇත. පද්ධතිය නිශ්චලතාවයේ සිට මුදාහරිනු ලැබේ. Y කුඤ්ඤය එහි EF මුහුණත X හි AC අයත් මුහුණත ස්පර්ශ කරමින් වලනය වන හා P අංගුව DE ස්පර්ශ කරමින් වලනය වන අතරතුර, X කුඤ්ඤයේ ත්වරණය නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලියා දක්වන්න.





$\mathbf{a}(X,E) = F_1 \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\rightarrow$

$\mathbf{a}(Y,X) =$ (α ත්‍රිකෝණය, f_1) (10) /00

$\mathbf{a}(P,Y) =$ ($\alpha - \beta$ ත්‍රිකෝණය, f_2)

ත්වරණ 3ම සඳහා

* යොදූ බල සඳහා (10)

~~සඳහන්~~ අඩු නම් ල·(05) ක් ලබා දෙන්න.

(අදාළ ප්‍රතික්‍රියා නිවැරදිව නොපෙන්නා නම්)

$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ යොදමු :

පද්ධතිය සඳහා $\rightarrow$:

$$0 = M_1F_1 + M_2\left(F_1 - f_1\cos\alpha\right) + m\left(F_1 - f_1\cos\alpha - f_2\cos(\alpha-\beta)\right).$$ (10) /00

(5) (5) (5)

මූල සම්කරණය නිවැරදි නම්

Y හා P සඳහා (α ත්‍රිකෝණය) :

$$(M_2+m)\,g\sin\alpha = M_2\left(f_1 - F_1\cos\alpha\right) + m\left(f_1 + f_2\cos\beta - F_1\cos\alpha\right).$$ (10) /00

(5) (5) (5)

මූල සම්කරණයට

P සඳහා ($\alpha - \beta$ ත්‍රිකෝණය)

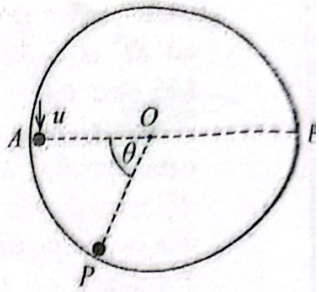
$$mg\sin(\alpha-\beta) = m\left(f_2 + f_1\cos\beta - F_1\cos(\alpha-\beta)\right).$$ (10) /00

(5) (5)

මූල සම්කරණයට

Scanned with CamScanner

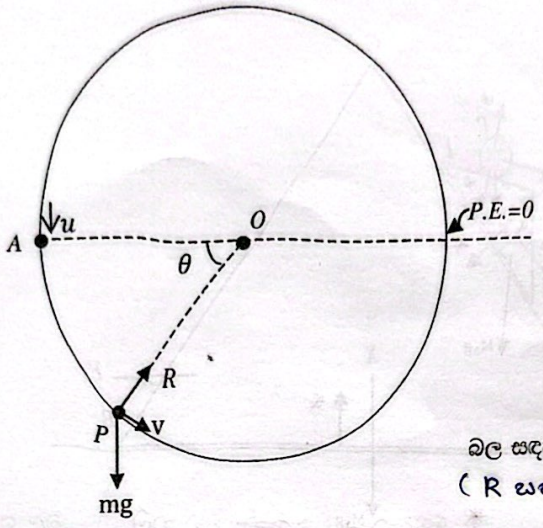
(b) සුමට අභ්‍යන්තර පෘෂ්ඨයක් සහිත අරය a වන අවල සෘජු-වෘත්තාකාර කුහර සිලින්ඩරයක තිරස් අක්ෂයට ලම්බක සිරස් හරස්කඩක් යාබද රූපයෙන් දැක්වේ.



O ලක්ෂ්‍යය එහි කේන්ද්‍රය ද, A හා B එහි තිරස් විෂ්කම්භයේ අන්ත ද වේ. ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් u වේගයෙන් සිලින්ඩරයේ අභ්‍යන්තර පෘෂ්ඨය මත A සිට සිරස්ව යටි දිශාවට ප්‍රක්ෂේපණය කරනු ලැබේ. P, සිලින්ඩරය සමඟ ස්පර්ශව ඇතිව, θ කෝණයකින් OP හැරුණු විට P හි වේගය v යැයි ගනිමු.

$v^2 = u^2 + 2ga\sin\theta$ බව පෙන්වන්න.

$\theta = \frac{7\pi}{6}$ විට, P සිලින්ඩරයේ අභ්‍යන්තර පෘෂ්ඨය හැර යන බව දී ඇත. $u = \sqrt{\frac{3ga}{2}}$ බව පෙන්වන්න.



බල සඳහා (5)
(R සහ mg සඳහා)

ශක්ති සංස්ථිතියෙන් :

$$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mv^2 - mga\sin\theta$$

$$\therefore v^2 = u^2 + 2ga\sin\theta \quad (5)$$

15 → P.E. (5), K.E. (5), සමීකරණය (5)

(m) θ $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$:

$$R - mg\sin\theta = m\frac{v^2}{a} \quad (10)$$

$$\therefore R = \frac{m}{a}\left(u^2 + 2ga\sin\theta\right) + mg\sin\theta \quad (5)$$ ආදේශය

$\theta = \frac{7\pi}{6}$ විට $R = 0$ වේ. (5)

Scanned with CamScanner

$$\therefore \quad 0 = \frac{m}{a}\left(u^2 + 2ga\sin\frac{7\pi}{6}\right) + mg\sin\frac{7\pi}{6} \quad (5)$$

$$\therefore \quad 0 = u^2 + 2ga\left(-\frac{1}{2}\right) + ga\left(-\frac{1}{2}\right) \quad (5)$$

$$\therefore \quad u^2 = \frac{3ga}{2}$$

$$\therefore \quad u = \sqrt{\frac{3ga}{2}} \,. \quad (5)$$

35

13. ස්වභාවික දිග a වන සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරක් O අචල ලක්ෂ්‍යයකට ද අනෙක් කෙළවර ස්කන්ධය m වූ P අංශුවකට ද ඇදා, P සිරස් වලිතයේ යොදවා ඇත. අංශුව සිරස්ව පහළට ගමන් කරන විට O ට පහළින් $OA = a$ වන A ලක්ෂ්‍යය පසු කරද්දී එහි වේගය $\sqrt{2ag}$ වේ. O ට $3a$ පහළින් වූ B ලක්ෂ්‍යයේදී අංශුව ක්ෂණික නිශ්චලතාවයට පැමිණේ. තන්තුවේ ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය $\frac{3}{2}mg$ බව පෙන්වන්න.

තව ද, P හි වලිත සමීකරණය $\ddot{x} + \omega^2\left(x - \frac{5a}{3}\right) = 0$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න; මෙහි $x > a$ සඳහා $OP = x$ වන අතර ω (> 0) නිර්ණය කළ යුතු නියතයක් වේ.

ඉහත වලිත සමීකරණය, $X = x - \frac{5a}{3}$ ලෙස ගෙන නැවත ලියන්න.

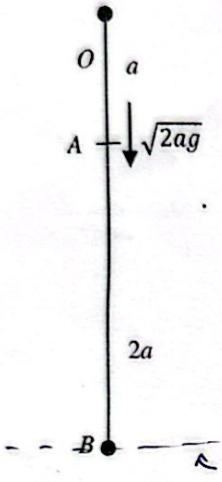
අංශුවේ මෙම සරල අනුවර්ති වලිතයේ කේන්ද්‍රය, විස්තාරය හා ආවර්ත කාලය සොයන්න.

$\dot{X}^2 = \omega^2(C^2 - X^2)$ සූත්‍රය භාවිතයෙන් P හි උපරිම වේගය සොයන්න; මෙහි C යනු විස්ථාරය වේ.

එය ඉහළට යාමේදී, P යන්තමින් O ට ළඟා වන බව පෙන්වන්න.

B සිට O දක්වා ගමන් කිරීමට P ට ගතවන මුළු කාලය $\sqrt{\frac{2a}{27g}}\left(2\pi + 3\sqrt{3}\right)$ බව පෙන්වන්න.

ඉහත සරල අනුවර්තීය වලිතය ආරම්භ කරනු ලැබුවේ P පහළට ඇද අත හැරීමෙන් නම්, තන්තුව එහි ස්වභාවික දිගේ සිට කොපමණ දුරක් ඇදිය යුතු දැයි ප්‍රකාශ කරන්න.



ප්‍රත්‍යාස්ථා මාපාංකය λ යැයි සිතමු.

ශක්ති සංස්ථිති නියමයෙන්: (A හා B අතර)

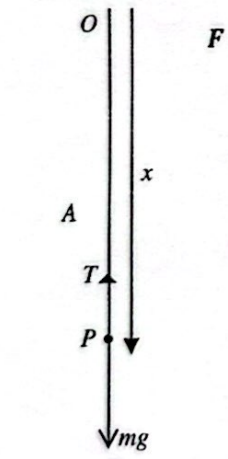
$$\frac{1}{2}m \times 2ga + mg \times 2a = \frac{1}{2}\frac{\lambda(2a)^2}{a}$$

(K.E) (P.E) (5) (5) (5) ප්‍රත්‍යාස්ථ විභව ශක්තිය

$$3mga = 2\lambda a$$

$$\therefore \quad \lambda = \frac{3}{2}mg. \quad (5)$$

P.E = 0



$F = ma$:

$$mg - T = m\ddot{x} \quad (5)$$

$$mg - \frac{3}{2}mg\frac{(x-a)}{a} = m\ddot{x} \quad (5) \qquad T = \frac{\lambda x}{l}$$

$$\ddot{x} = g - \frac{3}{2}g\frac{x}{a} + \frac{3g}{2}$$

$$\ddot{x} + \frac{3g}{2a}x - \frac{5}{2}g = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{3g}{2a}\left(x - \frac{5a}{3}\right) = 0 \quad (5)$$

$$\ddot{x} + \omega^2\left(x - \frac{5a}{3}\right) = 0, \text{-------(1)}$$

මෙහි $\omega = \sqrt{\frac{3g}{2a}}$ (5)

Scanned with CamScanner

$X = x - \frac{5a}{3}$ යැයි ගනිමු.

එවිට $\dot{X} = \dot{x}$ හා $\ddot{X} = \ddot{x}$. (5)

දැන් (1) $\ddot{X} + \omega^2 X = 0$ බවට පත්වේ. (5) **10**

කේන්ද්‍රයේදී $\ddot{X} = 0$.

$X = 0$. (5)

$\therefore x = \frac{5a}{3}$. (5)

$x = 3a$ විට $\dot{x} = 0$.

$\therefore$ විස්ථාරය $= 3a - \frac{5a}{3} = \frac{4a}{3}$. (5)

ආවර්ත කාලය $= \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2a}{3g}}$. (5) **20**

$\dot{X}^2 = \omega^2\left(C^2 - X^2\right)$

උපරිම වේගය ලැබෙන්නේ $X = 0$ විටය.

උපරිම $\dot{X}^2 = \omega^2 c^2$ (5)

$\therefore$ උපරිම $\dot{X}^2 = \frac{3g}{2a} \cdot \left(\frac{4a}{3}\right)^2$

$= \frac{3g}{2a} \cdot \frac{16a^2}{9} = \frac{8}{3}ag$ (5)

$\therefore$ උපරිම වේගය $= \sqrt{\frac{8ag}{3}}$. (5) **15**

ගුරුත්වය යටතේ A සිට O දක්වා චලිතය

$v^2 = u^2 + 2as$:

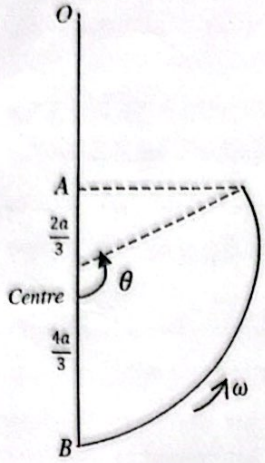
$v^2 = 2ag - 2ga$ සමීකරණයෙන් ලබා ගත හැකිය

$= 0$ (5)

$\therefore v = 0$.

$\therefore$ P යන්තමින් O වෙත ළඟා වේ. (5) **10**

Scanned with CamScanner



B සිට A දක්වා කාලය $= T_1$.

එවිට $T_1 = \frac{\theta}{\omega}$ (5)

$\theta = \pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ (5)

$= \pi - \frac{\pi}{3}$

$\theta = \frac{2\pi}{3}$ ↗ diagram එකේ ලකුණු කරලා තියෙන දෙන්න. (10) ම දෙන්න $\rightarrow = \frac{2\pi}{3}$ (5)

$\therefore T_1 = \sqrt{\frac{2a}{3g}} \cdot \frac{2\pi}{3}$ (5)

A සිට O දක්වා කාලය $= T_2$.

↑ $v = u + at$:

$0 = \sqrt{2ag} - gT_2$. (5) ← Apply කරන්න

$\therefore T_2 = \sqrt{\frac{2a}{g}}$ ← (5)

$\therefore$ B සිට O දක්වා මුළු කාලය $= T_1 + T_2$ ← (5)

$= \sqrt{\frac{2a}{3g}} \cdot \frac{2\pi}{3} + \sqrt{\frac{2a}{g}}$

$= \sqrt{\frac{2a}{27g}}\left(2\pi + 3\sqrt{3}\right)$. ← (5)

P එහි ස්වභාවික දිගෙන් $2a$ දුරක් ඇදිය යුතු ය.

Scanned with CamScanner

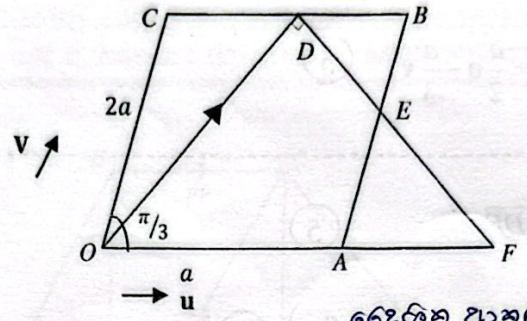
14.(a) $OA = a$, $OC = 2a$ හා $A\hat{O}C = \frac{\pi}{3}$ වන $OABC$ සමාන්තරාස්‍රයක් යැයි ගනිමු. $\mathbf{u}$ හා $\mathbf{v}$ යනු පිළිවෙළින් $\overrightarrow{OA}$ හා $\overrightarrow{OC}$ දිශාවලට වූ ඒකක දෛශික යැයි ද ගනිමු.

$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}a\mathbf{u} + 2a\mathbf{v}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි D යනු BC හි මධ්‍යලක්ෂ්‍යය වේ.

OD යන්න DE ට ලම්බ වන පරිදි AB මත වූ ලක්ෂ්‍යය E යැයි ගනිමු.

$\overrightarrow{DE} = \frac{a}{2}\mathbf{u} - \frac{a}{3}\mathbf{v}$ බව පෙන්වන්න.

OA හා DE දික්කළ රේඛාවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය F යැයි ගනිමු. $\overrightarrow{OF} = \frac{7a}{2}\mathbf{u}$ බව පෙන්වන්න.



දෛශික ආකලනය

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD}$ (5) $\leftarrow \overrightarrow{OC}$ $\underline{v}$ ඇසුරෙන් ලිවීම

$= 2a\underline{v} + \frac{1}{2}a\underline{u}$. (5) + (5) $\leftarrow \overrightarrow{CD}$ $\underline{u}$ ඇසුරෙන් ලිවීම.

$= \frac{1}{2}a\mathbf{u} + 2a\mathbf{v}$ (5)

20

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE}$

$= -\frac{1}{2}a\mathbf{u} - 2a\mathbf{v} + a\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v} = \frac{1}{2}a\mathbf{u} + (\lambda - 2a)\mathbf{v}$ (10) (00)

$\overrightarrow{AE}$ වෙනත් අන්දමක සමඟ ලියයි.

$\overrightarrow{OD} \perp \overrightarrow{DE} \Rightarrow \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{DE} = 0$ (5)

$\left(\frac{1}{2}a\mathbf{u} + 2a\mathbf{v}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}a\mathbf{u} + (\lambda - 2a)\mathbf{v}\right) = 0$ (5) ආදේශයට

$\frac{1}{4}a^2\underbrace{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}_{=1} + \frac{1}{2}a(\lambda - 2a)\underbrace{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}_{=\frac{1}{2}} + a^2\underbrace{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}_{=\frac{1}{2}} + 2a(\lambda - 2a)\underbrace{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}_{=1} = 0$ (5)

$\frac{1}{4}a + \frac{1}{4}(\lambda - 2a) + \frac{1}{2}a + 2(\lambda - 2a) = 0$ (5)

$\frac{9\lambda}{4} = 4a - \frac{3}{4}a + \frac{2a}{4}$

Scanned with CamScanner

$$\frac{9\lambda}{4} = 4a - \frac{a}{4}$$

$$\lambda = \frac{15}{9}a \quad = \frac{5}{3}a. \qquad (5)$$

$$\therefore \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}a\mathbf{u} + \left(\frac{5a}{3} - 2a\right)\mathbf{v}$$

$$= \frac{a}{2}\mathbf{u} - \frac{a}{3}\mathbf{v} \qquad (5)$$

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DF} \qquad (5)$$

$$(5) \quad \mu\mathbf{u} = \frac{1}{2}a\mathbf{u} + 2a\mathbf{v} + \beta\left(\frac{a}{2}\mathbf{u} - \frac{a}{3}\mathbf{v}\right) \quad (5)$$

$$\mu = \frac{1}{2}a + \beta\frac{a}{2} \text{ හා } 0 = 2a - \frac{\beta a}{3} \qquad (5) + (5)$$

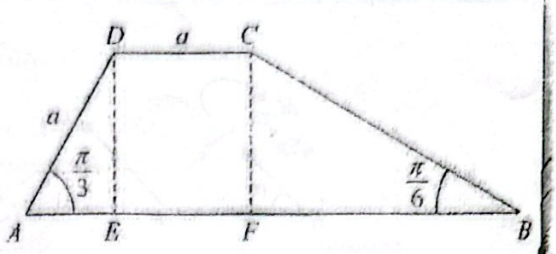
සමීකරණ 2යි

$$\therefore \beta = 6 \text{ හා } \mu = \frac{7a}{2}$$

$$\therefore \overrightarrow{OF} = \frac{7a}{2}\mathbf{u}. \qquad (5)$$

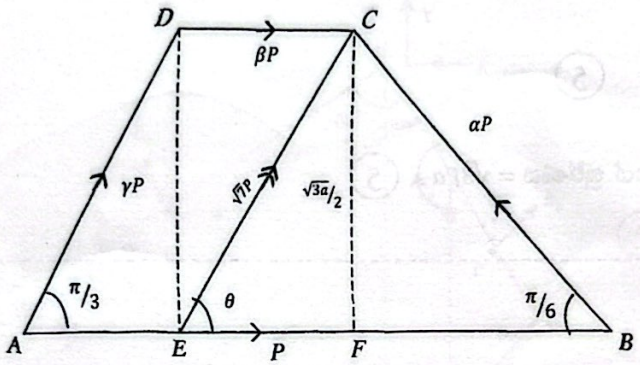
Scanned with CamScanner

(b) AB හා DC සමාන්තර ද $A\hat{B}C = \frac{\pi}{6}$, $B\hat{A}D = \frac{\pi}{3}$ හා $AD = DC = a$ ද වන $ABCD$ තුඹිසියමක් යැයි ගනිමු. $A\hat{E}D = A\hat{F}C = \frac{\pi}{2}$ වන පරිදි AB මත වූ ලක්ෂ්‍ය E හා F මේ (රූපය බලන්න). විශාලත්ව P, αP, βP හා γP වූ බල පිළිවෙළින් AB, BC, DC හා AD දිගේ අක්ෂර අනුපිළිවෙළින් දැක්වෙන දිශාවලට ක්‍රියාකරයි.



ඒවායේ සම්ප්‍රයුක්ත බලය $\sqrt{7}P$ විශාලත්වයකින් යුත් බව හා එය E හා C ලක්ෂ්‍ය හරහා E සිට C දිශාව යන බව ද දී ඇත. α, β හා γ හි අගයන් සොයන්න.

දැන්, පද්ධතියට බල යුග්මයක් එකතු කරනු ලබන්නේ නව පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාව F ලක්ෂ්‍යය හරහා යන පරිදි ය. එකතු කළ බල යුග්මයෙහි ස්‍රාර්ණය සොයන්න.



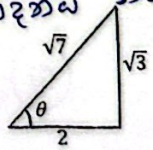
$\curvearrowleft C$ $\left(\frac{\gamma P}{2}+P\right)\frac{\sqrt{3}a}{2}-\frac{\gamma P\sqrt{3}}{2}\left(\frac{a}{2}+a\right)=0$ (10) /(00)

$$\frac{\gamma}{2}+1-\frac{3\gamma}{2}=0$$

$$r=1. \quad (5)$$

$\uparrow$ $\gamma P\frac{\sqrt{3}}{2}+\alpha P\frac{1}{2}=\sqrt{7}P\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ (10) /(00)

γ වැරදී ඇත්නම් විභේදනය නිවැරදි නම් (10)ට දෙන්න.



$$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\alpha}{2}=\sqrt{3}$$

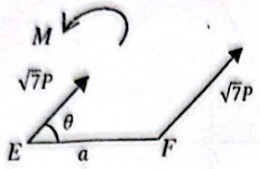
$$\alpha=\sqrt{3}. \quad (5)$$

$\rightarrow$ $P+\beta P+P\times\frac{1}{2}-\sqrt{3}P.\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{7}P.\frac{2}{\sqrt{7}}$ (10) /(00)

$$\beta=2. \quad (5)$$

45

Scanned with CamScanner



F $\sqrt{7}Pa\sin\theta - M = 0$ (5)

$$M = \sqrt{7}Pa \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

$$= \sqrt{3}Pa \qquad (5)$$

යුග්මයේ සූර්ණය $= \sqrt{3}Pa$ (5)

Scanned with CamScanner

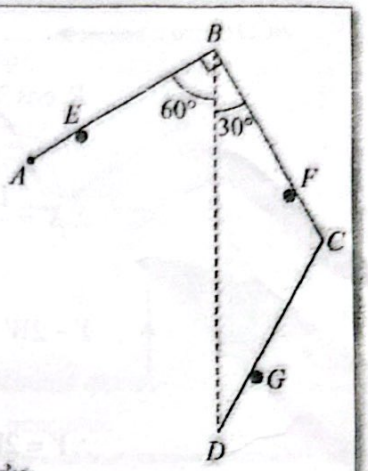
15. (*a*) $4a$ සමාන දිගින් හා W සමාන බරින් යුත් AB, BC හා CD ඒකාකාර දඬු තුනක් B හා C අන්තවලදී සුමටව සන්ධි කර ඇත. A අන්තය අචල ලක්ෂ්‍යයකට සුමට ලෙස අසවු කර ඇත.
රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි, $AE = CF = DG = a$, $A\hat{B}D = 60^\circ$, $C\hat{B}D = 30^\circ$ හා BD සිරස් වන පරිදි දඬු තුන සිරස් තලයක සමතුලිතව තබා ඇත්තේ E, F හා G සුමට නාදැති තුනක් මත තැබීමෙනි.

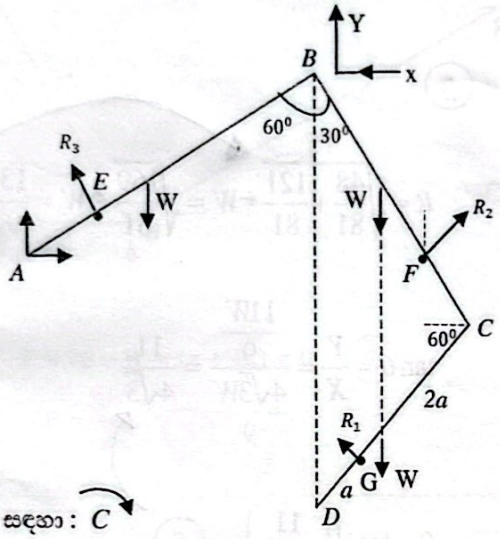
(i) G නාදැත්ත මගින් CD දණ්ඩ මත යොදන ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය $\frac{W}{3}$ බව ද,

(ii) F නාදැත්ත මගින් BC දණ්ඩ මත යොදන ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය $\frac{11W}{9}$ බව ද,

පෙන්වන්න.

AB දණ්ඩ මගින් BC දණ්ඩ මත B සන්ධියේදී යොදන ප්‍රතික්‍රියාව ද සොයන්න.





(5) බල සඳහා
(A වල ප්‍රතික්‍රියා හැර, B හිදී X හා Y හැර ඉතිරි බල)

(i) DC දණ්ඩය සඳහා : C ↷

$$R_1 \times 3a - W \times 2a\cos 60^0 = 0 \quad (5)$$

$$R_1 = \frac{W}{3}. \quad (5)$$

15

(ii) BCD සඳහා: B ↶

$$R_2 \times 3a - 2 \times W \times 2a\sin 30^0$$
$$-R_1\cos 30^0 \times 7a\cos 30^0 + R_1 \sin 30^0 \times a\sin 30^0 = 0 \quad (10)$$

$$3R_2 = 2W + \frac{W}{3} \times 7 \times \frac{3}{4} - \frac{W}{3} \times \frac{1}{4}$$

$$= 2W + \frac{20W}{12}$$

$$\therefore R_2 = \frac{11W}{9}. \quad (5)$$

15

Scanned with CamScanner

BCD සඳහා : ⟶

$$R_2\cos 30^0 - R_1\cos 30^0 - X = 0 \quad (5)$$

$$\therefore X = \frac{11W}{9}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{W}{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{3}W}{18} = \frac{4\sqrt{3}}{9}W \quad (5)$$

↑

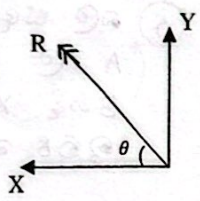
$$Y - 2W + R_1\sin 30^0 + R_2\sin 30^0 = 0 \quad (5)$$

$$\therefore Y = 2W - \frac{W}{3}\times\frac{1}{2} - \frac{11W}{9}\times\frac{1}{2}$$

$$= 2W - \frac{14W}{18}$$

$$= \frac{11W}{9}. \quad (5)$$

$$R = \sqrt{\frac{48}{81} + \frac{121}{81}} \leftarrow W = \sqrt{\frac{169}{81}} \leftarrow W = \frac{13}{9}W. \quad (5)$$



$$\tan\theta = \frac{Y}{X} = \frac{\frac{11W}{9}}{\frac{4\sqrt{3}W}{9}} = \frac{11}{4\sqrt{3}}$$

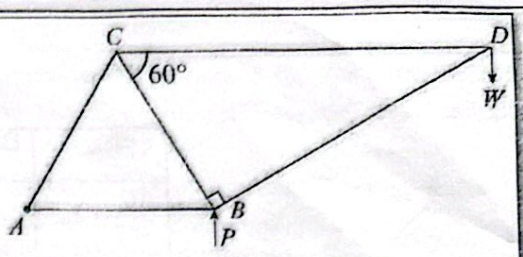
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{11}{4\sqrt{3}}\right). \quad (5)$$

* වැරදි X හා Y සඳහා R සඳහා ලකුණු නාවේ.

" " " " " ලකුණු නාවේ.

Scanned with CamScanner

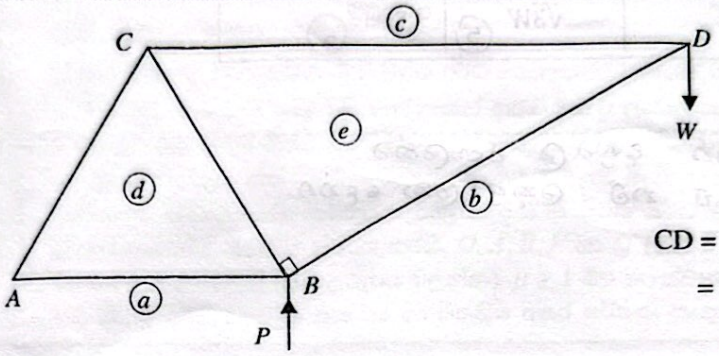
(b) රූපයේ දැක්වෙන රාමු සැකිල්ල, ඒවායේ අන්තවලදී සුමට ලෙස සන්ධි කළ AB, BC, CA, CD හා DB සැහැල්ලු දඬු පහකින් සමන්විත වේ. $AB = BC = CA = 2a$, $C\hat{B}D = 90^\circ$ හා $B\hat{C}D = 60^\circ$ බව දී ඇත. W භාරයක් D සන්ධියෙන් එල්ලා ඇති අතර රාමු සැකිල්ල A හිදී අචල ලක්ෂ්‍යයකට සුමට ලෙස සන්ධි කර AB තිරස්ව සිරස් තලයක සමතුලිතව තබා ඇත්තේ එයට B සන්ධියෙහිදී සිරස්ව උඩු අතට යෙදූ P බලයක් මගිනි.



(i) P හි අගය සොයන්න.

(ii) බෝ අංකනය භාවිතයෙන් D, C හා B සන්ධි සඳහා ප්‍රත්‍යාබල සටහනක් අඳින්න.

ඒ නයින්, දඬුවල ප්‍රත්‍යාබල, ආතති ද තෙරපුම් ද යන්න ප්‍රකාශ කරමින් සොයන්න.



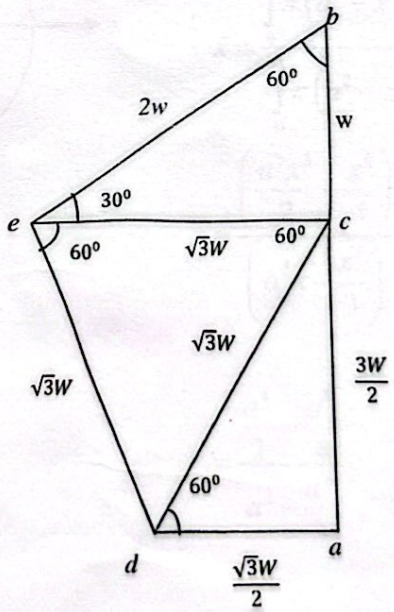
$CD = 2a\sec 60^0$

$= 4a$

A) $P \times 2a - W \times (a + 4a) = 0$ (5)

$\therefore P = \frac{5W}{2}$. (5)

10



සන්ධි යකට (10) බැගින්

(30)

* P වැරදි වුවත් හැඩය වෙන්ව වී නොමැති නම් ලකුණු ලබා දෙන්න.

* ශීර්ෂ 3ට වෙන වෙනම සවහන් ඇඳ ඇත්නම් ල. (10) දෙන්න.

30

Scanned with CamScanner

දණ්ඩ	විශාලත්වය	ආතතිය/තෙරපුම්
AB	$\frac{\sqrt{3}W}{2}$ (5)	තෙරපුම් (5)
BD	$2W$ (5)	තෙරපුම් (5)
DC	$\sqrt{3}W$ (5)	ආතතිය (5)
CA	$\sqrt{3}W$ (5)	ආතතිය (5)
BC	$\sqrt{3}W$ (5)	තෙරපුම් (5)

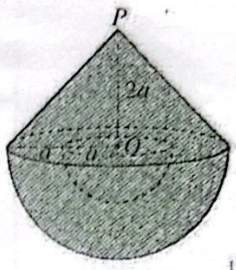
(50)

P වැරදි වුවත් දැඹුවල ප්‍රතාලන්ව වෙනස් නොවේ නම් ලකුණු ලබා දෙන්න.

Scanned with CamScanner

16. අරය a වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{3}{8}a$ දුරකින් පිහිටන බව හා උස h වූ ඒකාකාර ඝන ඍජු-වෘත්තාකාර කේතුවක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි පතුලේහි කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{1}{4}h$ දුරකින් පිහිටන බව ද පෙන්වන්න.

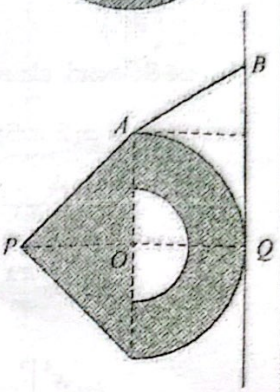
අරය a හා කේන්ද්‍රය O වූ අර්ධ ගෝලාකාර කොටසක් අරය $2a$, කේන්ද්‍රය O හා ඝනත්වය ρ වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයකින් කපා ඉවත් කරනු ලැබේ. දැන්, පතුලෙහි අරය $2a$ හා උස $2a$ වූ ඝනත්වය $\lambda\rho$ වූ ඒකාකාර ඝන ඍජු වෘත්තාකාර කේතුවක් අර්ධ ගෝලයෙහි ඉතිරි කොටසට යාබද රූපයේ පෙන්වා ඇති ආකාරයට දෘඪ ලෙස සවි කර ඇත. මෙලෙස යාදාගනු ලැබූ S වස්තුවෙහි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, P සිට $\frac{(48\lambda+157)}{8(4\lambda+7)}a$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න; මෙහි P යනු S හි ඝන කේතුවෙහි ශීර්ෂය වේ.

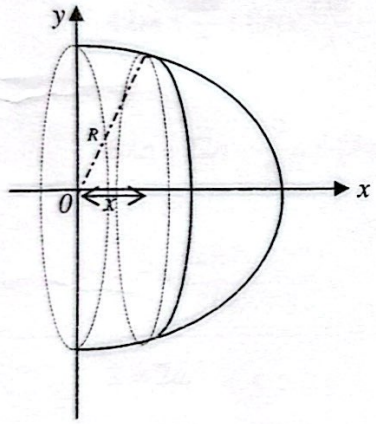


S හි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, O හි පිහිටීම සඳහා λ හි අගය සොයන්න.

දැන්, λ ට මෙම අගය ඇතැයි සිතමු.

Q යනු දික්කළ PO රේඛාව S හි පිටත අර්ධ ගෝලාකාර පෘෂ්ඨය හමුවන ලක්ෂ්‍යය යැයි ගනිමු. තව ද, A යනු S හි වෘත්තාකාර දාරය මත වූ ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ද ගනිමු. S වස්තුව රළු සිරස් බිත්තියකට ඵරෙහිව සමතුලිතව තබා ඇත්තේ A ලක්ෂ්‍යයට හා සිරස් බිත්තිය මත වූ B අචල ලක්ෂ්‍යයකට ඇඳා ඇති සැහැල්ලු අවිතනය තන්තුවක ආධාරයෙනි. සමතුලිත පිහිටුමේදී S හි පිටත අර්ධ ගෝලීය පෘෂ්ඨය Q ලක්ෂ්‍යයෙහිදී බිත්තිය ස්පර්ශ කරයි. O, A, B, P හා Q ලක්ෂ්‍ය බිත්තියට ලම්බ සිරස් තලයක පිහිටයි (යාබද රූපය බලන්න). $\mu \geq 1$ බව පෙන්වන්න; මෙහි μ යනු S හි පිටත අර්ධ ගෝලීය පෘෂ්ඨය හා බිත්තිය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය වේ.





සමමිතියෙන් ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය x - අක්ෂය මත පිහිටයි. (5)

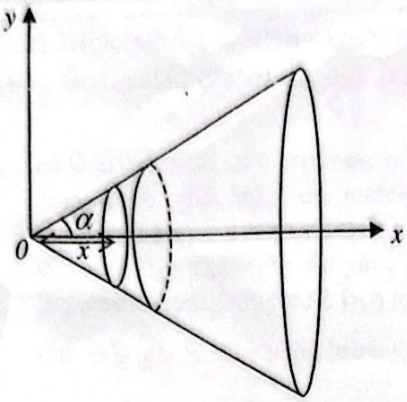
$OG = \bar{x}$. යැයි ගනිමු.

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a \pi\left(a^2 - x^2\right)\rho x\,dx}{\int_0^a \pi\left(a^2 - x^2\right)\rho\,dx} \quad (5) + (5)$$

$$= \frac{\left(\frac{a^2x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^a}{\left(a^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a} \quad (5) + (5)$$

$$= \frac{\frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{4}}{a^3 - \frac{a^3}{3}}$$

$$= \frac{3a}{8} \quad (5)$$



සමමිතියෙන්, ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය x - අක්ෂය මත පිහිටයි. (5)

$OG = \bar{x}$ යැයි ගනිමු.

$$\bar{x} = \frac{\int_0^h \pi x^2 \tan^2\alpha \cdot \rho x dx}{\int_0^h \pi x^2 \tan^2\alpha \cdot \rho dx}$$ (5) + (5)

$$= \frac{\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^h}{\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^h}$$ (5)

$$= \frac{\frac{h^4}{4}}{\frac{h^3}{3}} = \frac{3h}{4}.$$ (5)

∴ පතුලෙහි කේන්ද්‍රයේ සිට යට ඇති දුර

$$= h - \frac{3h}{4}$$ (5)

$$= \frac{h}{4}.$$

60

සමමිතියෙන්, ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය O හා P යා කරන රේඛාව මත පිහිටයි. (5)

වස්තුව	ස්කන්ධය	ස්.ගෝ.ට P සිට දුර
	$\frac{1}{3}\pi(2a)^2 2a\lambda\rho$ $=\frac{8}{3}\pi a^3\lambda\rho = 4\lambda m$	$\frac{3}{4}(2a)=\frac{3a}{2}$
	$\frac{2}{3}\pi(2a)^3\rho$ $=\frac{16}{3}\pi a^3\rho = 8m$	$2a+\frac{3}{8}(2a)$ $=\frac{11a}{4}$
	$\frac{2}{3}\pi a^3\rho = m$	$2a+\frac{3a}{8}$ $=\frac{19}{8}a$
S	$(4\lambda+7)m$	$\bar{x}$

35

මෙහි $m=\frac{2}{3}\pi a^3\rho.$

$4\lambda m\times\frac{3a}{2}+8m\times\frac{11a}{4}-m\times\frac{19a}{8}=(4\lambda+7)m\times\bar{x}$ (10) /(00)

$6\lambda a+22a-\frac{19}{8}a=(4\lambda+7)\bar{x}$

$\therefore \bar{x}=\frac{(48\lambda+157)}{8(4\lambda+7)}a.$ (5)

55

$\bar{x}=2a.$ (5)

$\frac{48\lambda+157}{8(4\lambda+7)}a=2a$ (5)

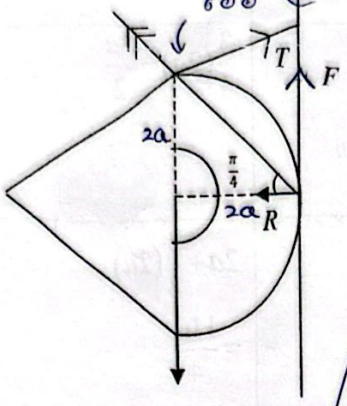
$\therefore 48\lambda+157=64\lambda+112$

$\therefore \lambda=\frac{45}{16}.$ (5)

15

Scanned with CamScanner

F හා R යුගලියුක්තය ශූන්‍ය වීම නිසා යා යුතුයි.



$\frac{F}{R} = \tan\frac{\pi}{4} = 1$ (15) $\frac{F}{R} = 1$ වෙන ලකුණ (15) ම දෙන්න.

$\mu \geq \frac{F}{R} \Rightarrow \mu \geq 1.$ (5)

→ හා ↑ විභේදනය → (5)

ලම්බයක් වටා සූර්ණ ගැනීම → (5)

$\frac{F}{R}$ සඳහා අගයක් ගැනීම → (5)

17. (a) පාටින් හැර අන් සෑම අයුරකින්ම සර්වසම සුදු පාට බෝල 2 ක් හා කළු පාට බෝල 3 ක් B_1 පෙට්ටියක අඩංගු වේ. බෝල 3 ක් B_1 පෙට්ටියෙන් සසම්භාව්‍ය ලෙස, හිස් B_2 පෙට්ටියකට මාරු කරනු ලැබේ. ඉන්පසු B_2 පෙට්ටියෙන් සසම්භාව්‍ය ලෙස බෝලයක් ඉවතට ගනු ලැබේ.

(i) B_2 පෙට්ටියෙන් ඉවතට ගනු ලැබූ බෝලය සුදු පාට වීමේ,

(ii) B_2 පෙට්ටියෙන් ඉවත ගනු ලැබූ බෝලය සුදු පාට බව දී ඇති විට, B_1 පෙට්ටියෙන් B_2 පෙට්ටිය තුළට සුදු පාට බෝල 2 ක් හා කළු පාට බෝල 1 ක් මාරු කර තිබීමේ

සම්භාව්‍යතාව සොයන්න.

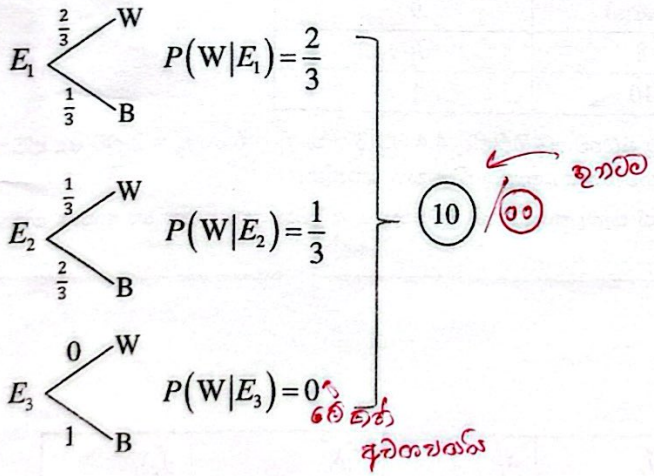
B_1 න් ඉවතට ගත් බෝල 3 න් i බෝල කළු පාට ඒවා වීමේ සිද්ධිය E_i යැයි ගනිමු; $i = 1, 2, 3$.

එවිට, $P(E_1) = \dfrac{{}^3C_1\,{}^2C_2}{{}^5C_3} = \dfrac{3}{10}$, (10)

$P(E_2) = \dfrac{{}^3C_2\,{}^2C_1}{{}^5C_3} = \dfrac{6}{10}$, (10)

$P(E_3) = \dfrac{{}^3C_3}{{}^5C_3} = \dfrac{1}{10}$. (10)

අගයන් 3ට ලකුණු දෙන්න.



10 /(00) නිවැරදි

මේ කොටස අවශ්‍යයෙන්ම

මුළු සම්භාවිතා නියමයෙන් :

$$P(W) = P(W|E_1)P(E_1) + P(W|E_2)P(E_2) + P(W|E_3)P(E_3)$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{3}{10} + \frac{1}{3} \times \frac{6}{10} + 0 \times \frac{1}{10}$$ (10) /(00)

අවශ්‍ය නැත.

$$= \frac{2}{5}.$$ (5)

55

Scanned with CamScanner

බේස් ප්‍රමේය :

$$P(E_1|W)=\frac{P(W|E_1).P(E_1)}{P(W)}$$ (10)

$$=\frac{\frac{2}{3}\times\frac{3}{10}}{\frac{2}{5}}$$ (10)/(00) වරදට අනුව නිවැරදි නම් දෙන්න.

$$=\frac{1}{2}$$ (5) මේ ලකුණු නැත.

15

(b) සිසුන් 20 දෙනෙකු ප්‍රහේලිකාවක් විසඳීම සඳහා ගත් කාලයන් එම එක් එක් කාලයෙන් 10 ක් අඩුකර ඉන්පසු 2 න් බෙදීම මගින් කේත කර ඇත.

සංඛ්‍යාත 2 ක් අතුරුදහන් වූ කේත කළ දත්තයන්හි සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තිය පහත දී ඇත:

කේත කළ කාලයන් (මිනිත්තු වලින්)	සංඛ්‍යාතය
0 – 2	2
2 – 4	f_1
4 – 6	9
6 – 8	f_2
8 – 10	1

කේත කළ කාලයන්හි නිමානය කළ මධ්‍යනාස්‍ය මිනිත්තු 4.4 බව දී ඇත. $f_1 = 6$ හා $f_2 = 2$ බව පෙන්වන්න.

කේත කළ කාලයන්හි සම්මත අපගමනය හා මාතය නිමානය කරන්න.

දැන්, ප්‍රහේලිකාව විසඳීම සඳහා ගත් සැබෑ කාලයන්හි මධ්‍යනාස්‍ය, සම්මත අපගමනය හා මාතය නිමානය කරන්න.

කේත කළ කාලයන් (මිනිත්තු වලින්)	f_i	x_i	f_ix_i	$f_ix_i^2$
0 - 2	2	1	2	2
2 - 4	f_1	3	$3f_1$	$9f_1=54$
4 - 6	9	5	45	225
6 - 8	f_2	7	$7f_2$	$49f_2=98$
8 - 10	1	9	9	81
			$56+3f_1+7f_2$	460

Scanned with CamScanner

$12 + f_1 + f_2 = 20$

$\therefore \quad f_1 + f_2 = 8$ ----------(1) (5)

$$\frac{\sum_{i=1}^{5} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{5} f_2} = \frac{56 + 3f_1 + 7f_2}{20} = 4.4$$ (10) (56 වැරදී නම් (10න් 5ක් දෙන්න)

$\therefore 3f_1 + 7f_2 = 32$ ----------(2) (5)

$(1),(2) \Rightarrow f_1 = 6$ and $f_2 = 2$ (5)

25

සම්මත අපගමනය $= \sqrt{\frac{460}{20} - (4.4)^2}$ (10) + (5)

for 460 (වර)

$= \sqrt{3.64}$ ← (5)

≈ 1.91 අවශ්‍ය නැත.

මාත පංතිය : 4 – 6

මාතය $= L + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}\right) c$

$= 4 + \left(\frac{9-6}{(9-6)+(9-2)}\right) \times 2$ ← (5)

$= 4 + \left(\frac{3}{3+7}\right) \times 2$

$= 4.6$ ← (5)

30

---

y යනු සැබෑ කාලය යැයි ගනිමු.

එවිට, $x = \frac{y-10}{2}$.

$\therefore y = 2x + 10.$ (5)

$\bar{y} = 2\bar{x} + 10$

$\therefore \bar{y} = 2 \times 4.4 + 10$

සැබෑ මාධ්‍යනය $= 18.8$ (5)

$\sigma_y = 2\sigma_x$ (5)

සැබෑ සම්මත අපගමනය $= 2 \times \sqrt{3.64} \approx 2 \times 1.91 = 3.82$ (5)

සැබෑ මානය $= 2 \times 4.6 + 10$

$= 19.2$ (5)

25