අ.පො.ස. (උ.පෙළ) විභාගය - 2021 (2022)

10 සංයුක්ත ගණිතය I

ලකුණු බෙදී යාමේ ආකාරය

I පත්‍රය

A කොටස	10 x 25	=	250
B කොටස	05 x 150	=	750

එකතුව = $\frac{1000}{10}$

II පත්‍රය අවසාන ලකුණු = 100

Department of Examinations - Sri Lanka

උත්තරපත්‍ර ලකුණු කිරීමේ පොදු ශිල්පීය ක්‍රම

උත්තරපත්‍ර ලකුණු කිරීමේ හා ලකුණු ලැයිස්තුවල ලකුණු සටහන් කිරීමේ සම්මත ක්‍රමය අනුගමනය කිරීම අනිවාර්යයෙන් ම කළ යුතුවේ. ඒ සඳහා පහත පරිදි කටයුතු කරන්න.

1. උත්තරපත්‍ර ලකුණු කිරීමට රතුපාට බෝල් පොයින්ට් පෑනක් පාවිච්චි කරන්න.

2. සෑම උත්තරපත්‍රයකම මුල් පිටුවේ සහකාර පරීක්ෂක සංකේත අංකය සටහන් කරන්න.
   ඉලක්කම් ලිවීමේදී **පැහැදිලි ඉලක්කමෙන්** ලියන්න.

3. ඉලක්කම් ලිවීමේදී වැරදුණු අවස්ථාවක් වේ නම් එය පැහැදිලිව තනි ඉරකින් කපා හැර නැවත ලියා කෙටි අත්සන යොදන්න.

4. එක් එක් ප්‍රශ්නයේ අනු කොටස්වල පිළිතුරු සඳහා හිමි ලකුණු ඒ ඒ කොටස අවසානයේ △ ක් තුළ ලියා දක්වන්න. අවසාන ලකුණු ප්‍රශ්න අංකයත් සමඟ □ ක් තුළ, භාග සංඛ්‍යාවක් ලෙස ඇතුළත් කරන්න. ලකුණු සටහන් කිරීම සඳහා පරීක්ෂකවරයාගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා ඇති තිරුව භාවිත කරන්න.

උදාහරණ : ප්‍රශ්න අංක 03

(i) ..... √ △ 4/5
.....
.....

(ii) ..... √ △ 3/5
.....
.....

(iii) ..... √ △ 3/5
.....
.....

03 (i) $\frac{4}{5}$ + (ii) $\frac{3}{5}$ + (iii) $\frac{3}{5}$ = □ $\frac{10}{15}$

බහුවරණ උත්තරපත්‍ර : (කවුළු පත්‍රය)

1. අ.පො.ස. (උ.පෙළ) හා තොරතුරු තාක්ෂණ විභාගය සඳහා කවුළු පත්‍ර දෙපාර්තමේන්තුව මගින් සකසනු ලැබේ. නිවැරදි වරණ කපා ඉවත් කළ සහතික කරන ලද කවුළුපතක් ඔබ වෙත සපයනු ලැබේ. සහතික කළ කවුළු පත්‍රයක් භාවිත කිරීම පරීක්ෂකගේ වගකීම වේ.

2. අනතුරුව උත්තරපත්‍ර හොඳින් පරීක්ෂා කර බලන්න. කිසියම් ප්‍රශ්නයකට එක් පිළිතුරකට වඩා ලකුණු කර ඇත්නම් හෝ එකම පිළිතුරක්වත් ලකුණු කර නැත්නම් හෝ වරණ කැපී යන පරිදි ඉරක් අදින්න. ඇතැම් විට අයදුම්කරුවන් විසින් මුලින් ලකුණු කර ඇති පිළිතුරක් මකා වෙනත් පිළිතුරක් ලකුණු කර තිබෙන්නට පුළුවන. එසේ මකන ලද අවස්ථාවකදී පැහැදිලිව මකා නොමැති නම් මකන ලද වරණය මත ද ඉරක් අදින්න.

Department of Examinations, Sri Lanka

3. කවුළු පත්‍රය උත්තරපත්‍රය මත නිවැරදිව තබන්න. නිවැරදි පිළිතුර ✓ ලකුණකින් ද, වැරදි පිළිතුර 0 ලකුණකින් ද වරණ මත ලකුණු කරන්න. නිවැරදි පිළිතුරු සංඛ්‍යාව ඒ ඒ වරණ තීරයට පහළින් ලියා දක්වන්න. අනතුරුව එම සංඛ්‍යා එකතු කර මුළු නිවැරදි පිළිතුරු සංඛ්‍යාව අදාළ කොටුව තුළ ලියන්න.

ව්‍යුහගත රචනා හා රචනා උත්තරපත්‍ර :

1. අයදුම්කරුවන් විසින් උත්තරපත්‍රයේ හිස්ව තබා ඇති පිටු හරහා රේඛාවක් ඇඳ කපා හරින්න. වැරදි හෝ නුසුදුසු පිළිතුරු යටින් ඉරි අඳින්න. ලකුණු දිය හැකි ස්ථානවල හරි ලකුණු යෙදීමෙන් එය පෙන්වන්න.

2. ලකුණු සටහන් කිරීමේදී ඕවර්ලන්ඩ් කඩදාසියේ දකුණු පස තීරය යොදා ගත යුතු වේ.

3. සෑම ප්‍රශ්නයකටම දෙන මුළු ලකුණු උත්තරපත්‍රයේ මුල් පිටුවේ ඇති අදාළ කොටුව තුළ ප්‍රශ්න අංකය ඉදිරියෙන් අංක දෙකකින් ලියා දක්වන්න. ප්‍රශ්න පත්‍රයේ දී ඇති උපදෙස් අනුව ප්‍රශ්න තෝරා ගැනීම කළ යුතුවේ. සියලු ම උත්තර ලකුණු කර ලකුණු මුල් පිටුවේ සටහන් කරන්න. ප්‍රශ්න පත්‍රයේ දී ඇති උපදෙස්වලට පටහැනිව වැඩි ප්‍රශ්න ගණනකට පිළිතුරු ලියා ඇත්නම් අඩු ලකුණු සහිත පිළිතුරු කපා ඉවත් කරන්න.

4. පරීක්ෂාකාරීව මුළු ලකුණු ගණන එකතු කොට මුල් පිටුවේ නියමිත ස්ථානයේ ලියන්න. උත්තරපත්‍රයේ සෑම උත්තරයකටම දී ඇති ලකුණු ගණන උත්තරපත්‍රයේ පිටු පෙරළමින් නැවත එකතු කරන්න. එම ලකුණ ඔබ විසින් මුල් පිටුවේ එකතුව ලෙස සටහන් කර ඇති මුළු ලකුණට සමාන දැයි නැවත පරීක්ෂා කර බලන්න.

ලකුණු ලැයිස්තු සකස් කිරීම :

සියලු ම විෂයන්හි අවසාන ලකුණු ඇගයීම් මණ්ඩලය තුළදී ගණනය කරනු නොලැබේ. එබැවින් එක් එක් පත්‍රයට අදාළ අවසාන ලකුණු වෙන වෙනම ලකුණු ලැයිස්තුවලට ඇතුළත් කළ යුතු ය. I පත්‍රය සඳහා බහුවරණ පිළිතුරු පත්‍රයක් පමණක් ඇති විට ලකුණු ලැයිස්තුවට ලකුණු ඇතුළත් කිරීමෙන් පසු අකුරෙන් ලියන්න. අනෙකුත් උත්තරපත්‍ර සඳහා විස්තර ලකුණු ඇතුළත් කරන්න.

***

Department of Examinations - Sri Lanka

1. **ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය** භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n}(6r+1) = n(3n+4)$ බව සාධනය කරන්න.

$n = 1$ සඳහා, ව.පැ. = 6+1=7 හා

ද.පැ = 1(3+4) = 7 වේ.

$\therefore n = 1$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. **5**

n=1 විට ප්‍රතිඵලය සත්‍යාපනය කිරීම සඳහා

k යනු ඕනෑම ධන නිඛිලයක් යැයි ගෙන $n = k$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරමු.

එනම්, $\sum_{r=1}^{k}(6r+1) = k(3k+4)$. **5**

$n=k$ සඳහා ප්‍රකාශනය ලිවීමට

දැන්, $\sum_{r=1}^{k+1}(6r+1) = \sum_{r=1}^{k}(6r+1) + \{6(k+1)+1\}$

$= k(3k+4) + 6k + 7$ **5**

"$n=k$ ප්‍රතිඵලය, "$n=k+1$" හි ආදේශ කිරීම සඳහා

$= 3k^2 + 10k + 7$

$= (k+1)(3k+7)$. **5**

$= (k+1)\left[3(k+1)+4\right]$.

$(k+1)$ $(3k+7)$ හෝ තුල්‍ය ප්‍රකාශනයක් පෙන්වා තිබීමට

ඒ නයින්, $n = k$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍යනම් $n = k+1$ සඳහා ද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

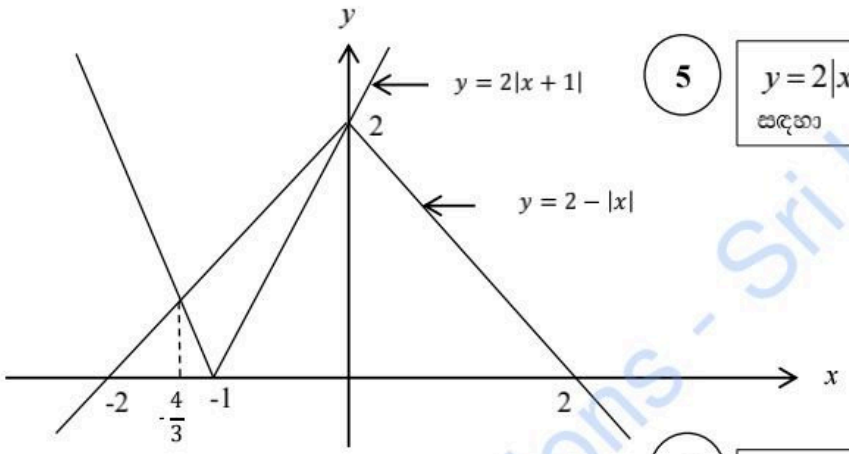
$n = 1$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍යබව ඉහත පෙන්වා ඇත.

ඒ නයින්, ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්ම මඟින් සියලු $n \in \mathbb{Z}$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. **5**

ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මයට අනුව නිගමනයට (සියලුම අනෙක් පියවර නිවැරදි නම් පමණි.)

Department of Examinations - Sri Lanka

2. එක ම රූප සටහනක $y=2|x+1|$ හා $y=2-|x|$ හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න.
ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $2|x+2|+|x|\leq 4$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලු ම තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.



5

$y=2|x+1|$ ප්‍රස්තාරය සඳහා

5

$y=2-|x|$ ප්‍රස්තාරය සඳහා

(ප්‍රස්තාර සඳහා ලකුණු 10 ම ලබා ගැනීමට y - අක්ෂය මත පොදු ඡේදන ලක්ෂ්‍යය තිබිය යුතුය. නොඑසේ නම් ලකුණු 05 ක් පමණි.)

එක් ඡේදන ලක්ෂ්‍යයක $x-$ බණ්ඩාංක $x=0$ වේ.

$x<-1$ සඳහා අනෙක් ඡේදන ලක්ෂ්‍යයේ $x-$ බණ්ඩාංක $-2(x+1)=2+x$ මඟින් දෙනු ලබයි.

මෙය $x=-\frac{4}{3}$ ලබා දෙයි. 5

$x=0$ සහ $x=-\frac{4}{3}$ පෙන්වා තිබීමට

$t=\frac{x}{2}$ යැයි ගනිමු. 5

$t=\frac{x}{2}$ ආදේශයට හෝ තුල්‍ය ප්‍රකාශනයකට

එවිට දෙන ලද අසමානතාව $2|2t+2|+|2t|\leq 4$ බවට පත් වේ.

මෙය $2|t+1|\leq 2-|t|$ ට තුල්‍ය වේ.

ප්‍රස්තාර මඟින් $-\frac{4}{3}\leq t\leq 0.$

$\therefore \quad -\frac{8}{3}\leq x\leq 0.$ 5

නිවැරදි විසඳුම ලබා ගැනීමට

Department of Examinations - Sri Lanka

විකල්ප ක්‍රමය 1:

ඉහත පරිදි ප්‍රස්තාර සඳහා (5) + (5)

(i) අවස්ථාව $x \leq -2$

එවිට, $2|x+2|+|x| \leq 4 \Leftrightarrow -2(x+2)-x \leq 4$

$\Leftrightarrow \quad -3x-4 \leq 4$

$\Leftrightarrow \quad -\frac{8}{3} \leq x$

ඒ නයින් මෙම අවස්ථාවේදී විසඳුම වන්නේ $-\frac{8}{3} \leq x \leq -2$ තෘප්ත කරන x හි අගයන් වේ.

(ii) අවස්ථාව $-2 < x \leq 0$

එවිට, $2|x+2|+|x| \leq 4 \Leftrightarrow 2(x+2)-x \leq 4$

$\Leftrightarrow \quad x \leq 0$

ඒ නයින් මෙම අවස්ථාවේදී විසඳුම වන්නේ $-2 < x \leq 0$ තෘප්ත කරන x හි අගයන් වේ.

(iii) අවස්ථාව $x > 0$

එවිට, $2|x+2|+|x| \leq 4 \Leftrightarrow 2(x+2)+x \leq 4$

$\Leftrightarrow \quad 3x+4 \leq 4$

$\Leftrightarrow \quad x \leq 0$

ඒ නයින් මෙම අවස්ථාවේදී විසඳුම් නොමැත.

නිවැරදි විසඳුම් සහිත අවස්තා 3ම සඳහා	10
නිවැරදි විසඳුම් සහිත අවස්තා 2 ක් සඳහා	5

∴ දෙන ලද අසමානතාව සඳහා විසඳුම් වන්නේ $-\frac{8}{3} \leq x \leq 0$ (5)

තෘප්තකරන x හි අගයන් වේ.

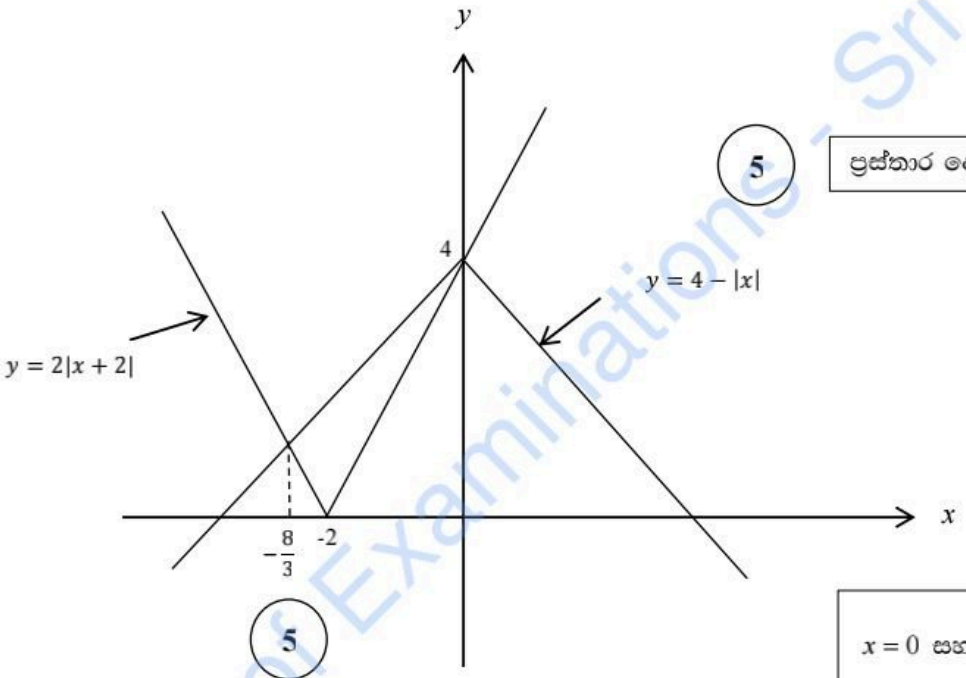
Department of Examinations - Sri Lanka

විකල්ප ක්‍රමය 2:

ඉහත පරිදි ප්‍රස්තාර සඳහා (5) + (5)

$$2|x+2|+|x| \le 4$$

$$\Leftrightarrow 2|x+2| \le 4-|x|$$



(5) ප්‍රස්තාර දෙක සඳහා

(5)

$x = 0$ සහ $x = -\frac{8}{3}$ පෙන්වා තිබීම.

ප්‍රස්තාර මඟින්,

$$2|x+2| \le 4-|x|$$

$$\Leftrightarrow -\frac{8}{3} \le x \le 0$$

(5)

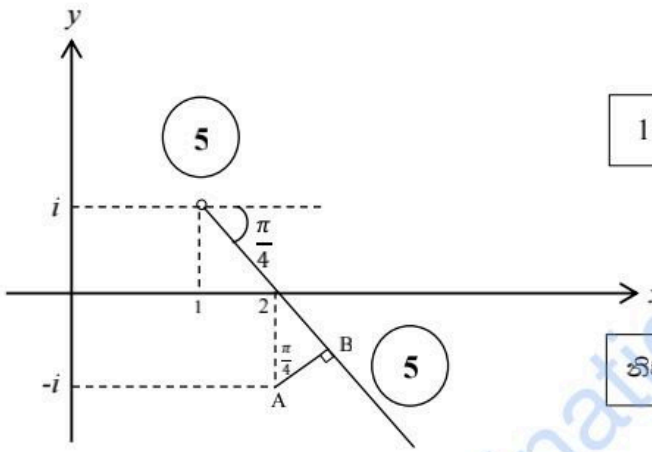
නිවැරදි විසඳුම පෙන්වා තිබීමට

Department of Examinations - Sri Lanka

3. ආගන්ඩ් සටහනක, $\text{Arg}(z-1-i) = -\frac{\pi}{4}$ සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යවල පථයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.

ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $\text{Arg}(iz+1-i) = \frac{\pi}{4}$ සපුරාලන $|z-2+i|$ හි අවම අගය $\frac{1}{\sqrt{2}}$ බව පෙන්වන්න.

$$\text{Arg}\left(z-(1+i)\right) = -\frac{\pi}{4}$$



5

$1+i$ හි සිදුර

5

නිවැරදි අර්ධ රේඛාව

$$\text{Arg}\left(i(z-i-1)\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Arg}\, i + \text{Arg}\left(z-(1+i)\right) = \frac{\pi}{4}$$

ගුණිතයක විස්තාරය ඒකායයක් ලෙස ප්‍රකාශ කිරීම සහ $\text{Arg}\, i = \frac{\pi}{2}$ භාවිතය

$$\text{Arg}\left(z-(1+i)\right) = -\frac{\pi}{4}$$ 5

දැන්, $\min|z-(2-i)| = AB$ 5

අඩුම දුර තහවුරු කිරීම.

$$= 1.\cos\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$ 5

පිළිතුර ලබා ගැනීමට පියවර සඳහා

Department of Examinations - Sri Lanka

විකල්ප ක්‍රමය:

ඉහත පරිදි ප්‍රස්තාර සඳහා (5) + (5)

$z = x + iy$ යැයි ගනිමු.

එවිට $\frac{\pi}{4} = Arg(iz + 1 - i) = Arg\left(1 - y + i(x - 1)\right)$

$\therefore \quad x - 1 = (1)(1 - y)$

$\Rightarrow \quad x + y = 2.$ (5)

දෙන ලද විස්තාරය x හා y අතර සම්බන්ධයක් ලෙස ලිවීම.

දැන් $|z - 2 + i| = |x + iy - 2 + i|$

$= |(x - 2) + i(y + 1)|$

$= |y + i(y + 1)| \qquad (\because \quad y)$

$= \sqrt{y^2 + (y + 1)^2}$

$= \sqrt{2\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}}$ (5)

මාපාංකය, x හෝ y හි වර්ග පූර්ණය ලෙස ලිවීම.

$\geq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (\because 2\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0. \ (= 0 \text{ වන්නේ } y = -\frac{1}{2} \text{ විටය.}))$

$\therefore \min|z - 2 + i| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$ (5)

පිළිතුර ලබා ගැනීමට පියවර සඳහා

Department of Examinations - Sri Lanka

4. $k > 0$ යැයි ගනිමු. $\left(x^2+\frac{k}{x}\right)^{11}$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණයේ x^7 හි සංගුණකය හා $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{11}$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණයේ x^{-7} හි සංගුණකය සමාන බව දී ඇත. $k=1$ බව පෙන්වන්න.

$\left(x^2+\frac{k}{x}\right)^{11}$ සඳහා

$T_{r+1} = {}^{11}C_r (x^2)^{11-r}\left(\frac{k}{x}\right)^r = {}^{11}C_r x^{22-3r}k^r$

$22-3r=7 \Rightarrow r=5$ **5**

r හි නිවැරදි අගය සඳහා

$\therefore$ x^7 හි සංගුණකය $= {}^{11}C_5\ k^5$ **5**

නිවැරදි සංගුණකය

$\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{11}$ සඳහා $T_{r+1} = {}^{11}C_r\ x^{11-r}\ (-1)^r\left(\frac{1}{x^2}\right)^r = (-1)^r\,{}^{11}C_r\ x^{11-3r}$

$11-3r=-7 \Rightarrow \quad r=6$ **5**

r හි නිවැරදි අගය සඳහා

$\therefore$ x^{-7}හි සංගුණකය $= {}^{11}C_6$ **5**

නිවැරදි සංගුණකය

එවිට, ${}^{11}C_6 = {}^{11}C_5\ k^5$ මඟින් ${}^{11}C_6 = {}^{11}C_5$ නිසා $k=1$ ලබා දෙයි.

5

පිළිතුර ලබා ගැනීමට පියවර සඳහා

Department of Examinations - Sri Lanka

5. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x - \sin 2x}{x^2\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)} = 4$ බව පෙන්වන්න.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x - \sin 2x}{x^2(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin 2x}{\cos 2x} - \sin 2x}{x^2(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})} \times \frac{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$$ (5)

ප්‍රතිබද්ධයෙන් ගුණ කිරීමට

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{(1-\cos 2x)}{x^2\cos 2x} \times \left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$$

$$= \left(\lim_{2x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x}\right) \times \lim_{x\to 0} 2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \times \left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos 2x}\right) \times \lim_{x\to 0} \left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$$

$$= \underset{(5)}{1} \times \underset{(5)}{2} \times \underset{(5)}{1} \times \underset{(5)}{2}$$

සීමා එක එකක් සඳහා (5)

$= 4.$

Department of Examinations - Sri Lanka

විකල්ප ක්‍රමය 1:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x - \sin 2x}{x^2\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x(1-\cos 2x)}{x^2 \cos 2x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} \times \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$$ (5)

ප්‍රතිබද්ධයෙන් ගුණ කිරීමට

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x(1-\cos^2 2x)}{x^2 \cos 2x(1+\cos 2x)} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{2x}$$

$$= 4\left(\lim_{2x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x}\right)^3 \left(\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos 2x}\right)\left(\lim_{x \to 0} \frac{1}{1+\cos 2x}\right)\left(\lim_{x \to 0} \sqrt{1+x} + \sqrt{1+x}\right)$$

$$= 4 \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2} \times 2$$

(5) (5) (5) (5)

සීමා එක එකක් සඳහා (5)

$= 4.$

Department of Examinations - Sri Lanka

විකල්ප ක්‍රමය 2:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x - \sin 2x}{x^2\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right)}$$

(5) ප්‍රතිබද්ධයෙන් ගුණ කිරීමට

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \times \left(\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} - \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}\right) \frac{1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} \times \frac{\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)}{\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\tan x(2\tan^2 x)}{x^2(1-\tan^4 x)} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{2x}$$

$$= 2\left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}\right)^3 \left(\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x}\right)^3 \left(\lim_{x \to 0} \frac{1}{1-\tan^4 x}\right)\left(\lim_{x \to 0} \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)$$

$= 2 \times 1 \times 1 \times 1 \times 2$

(5) (5) (5) (5)

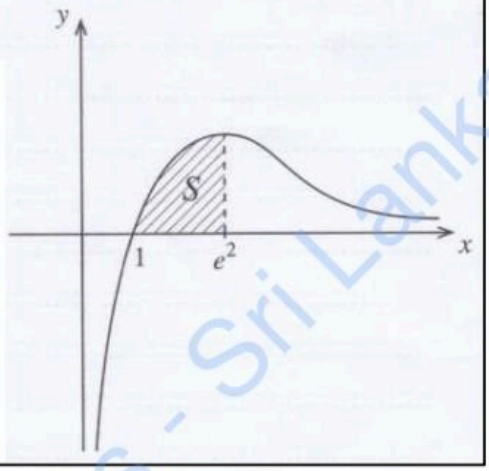
$= 4.$

සීමා එක එකක් සඳහා (5)

Department of Examinations - Sri Lanka

6. $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, $y = 0$ හා $x = e^2$ වක්‍ර මගින් ආවෘත වන පෙදෙස S යැයි ගනිමු. S හි වර්ගඵලය, වර්ග ඒකක 4 ක බව පෙන්වන්න.

S පෙදෙස x–අක්ෂය වටා රේඩියන 2π වලින් භ්‍රමණය කරනු ලැබේ. මෙලෙස ජනනය වන ඝන වස්තුවේ පරිමාව $\dfrac{8\pi}{3}$ බව පෙන්වන්න.



S හි වර්ගඵලය $= \int_1^{e^2} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\ dx$ (5)

S සඳහා අනුකලය සකසා ගැනීම

$= (\ln x).2x^{\frac{1}{2}}\Big|_1^{e^2} - \int_1^{e^2} 2x^{\frac{1}{2}} \times \dfrac{1}{x} dx$ (5)

කොටස් වශයෙන් අනුකලනයට හෝ තුල්‍ය ප්‍රකාශනයකට

$= 4e - 2\int_1^{e^2} x^{-\frac{1}{2}} dx$

$= 4e - \left(2\sqrt{x}2\right)\Big|_1^{e^2}$

$= 4e - 4e + 4$

$= 4$ (5)

පිළිතුර ලබා ගැනීමට පියවර

අවශ්‍ය පරිමාව $= \int_1^{e^2} \pi \left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$ (5)

පරිමාව සඳහා අනුකලය සකසා ගැනීමට

$= \pi \int_1^{e^2} \dfrac{(\ln x)^2}{x} dx$

$= \pi \dfrac{(\ln x)^3}{3}\Big|_1^{e^2}$

$= \dfrac{8\pi}{3}.$ (5)

පිළිතුර ලබා ගැනීමට පියවර සඳහා

Department of Examinations - Sri Lanka

7. $t \neq 0$ සඳහා $x = ct$ හා $y = \frac{c}{t}$ මගින් පරාමිතිකව දෙනු ලබන සෘජුකෝණාස්‍ර බහුවලයට $P \equiv \left(cp, \frac{c}{p}\right)$ ලක්ෂ්‍යයේදී වූ ස්පර්ශ රේඛාවේ සමීකරණය $x + p^2y = 2cp$ බව පෙන්වන්න.

P හි දී මෙම බහුවලයට වූ අභිලම්භ රේඛාව වෙනත් $Q \equiv \left(cq, \frac{c}{q}\right)$ ලක්ෂ්‍යයකදී බහුවලය නැවත හමු වේ. $p^3q = -1$ බව පෙන්වන්න.

$\frac{dx}{dt} = c$ හා $\frac{dx}{dt} = -\frac{c}{t^2}$.

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{c}{t^2}}{c} = -\frac{1}{t^2}$

5

t ඇසුරෙන් $\frac{dy}{dx}$

$\therefore$ P හිදි ස්පර්ශකයේ අනුක්‍රමණය $= -\frac{1}{t^2}\Big|_{t=p} = -\frac{1}{p^2}$

$\therefore$ P හිදි ස්පර්ශකයේ සමීකරණය

$$y - \frac{c}{p} = -\frac{1}{p^2}(x - cp)$$

$\therefore x + p^2y = 2cp.$ 5

පිළිතුර ලබා ගැනීමට පියවර

P හිදි අභිලම්බයේ අනුක්‍රමය $= p^2$.

$\therefore$ P හිදි අභිලම්බයේ සමීකරණය $y - \frac{c}{p} = p^2(x - cp)$ 5

අභිලම්බයේ සමීකරණය

$Q \equiv (cq, \frac{c}{q})$ මෙම අභිලම්බ රේඛාව මත වේ.

$\therefore \frac{c}{q} - \frac{c}{p} = p^2(cq - cp) \Rightarrow c(p - q) = -p^3qc(p - q)$ 5

ආදේශ කිරීම සඳහා

P හා Q ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙකක් නිසා $p \neq q$ වේ.

$p^3q = -1.$ 5

පිළිතුර ලබා ගැනීමට පියවර

Department of Examinations - Sri Lanka

විකල්ප ක්‍රමය: (අන්තිම කොටස සඳහා)

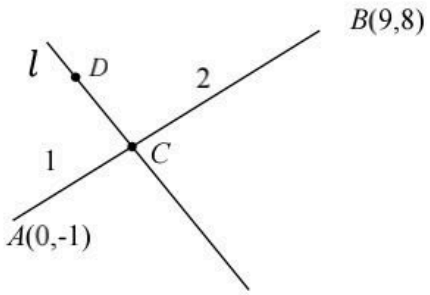
PQ අනුක්‍රමණය = P හිදී අභිලම්බයේ අනුක්‍රමණය (5) අවශ්‍යතාව සඳහා

$\therefore \dfrac{\frac{c}{q}-\frac{c}{p}}{cq-cp}=p^2$ (5) $(\because \quad \neq o)$ ආදේශය සඳහා

$\therefore p^3q=-1$ (5) පිළිතුර ලබා ගැනීමට පියවර

Department of Examinations - Sri Lanka

8. $A \equiv (0,-1)$ හා $B \equiv (9,8)$ යැයි ගනිමු. C ලක්ෂ්‍යය AB මත $AC:CB = 1:2$ වන පරිදි පිහිටයි. C හරහා යන AB ට ලම්බ වූ l සරල රේඛාවේ සමීකරණය $x + y - 5 = 0$ බව පෙන්වන්න.
$y = 5x + 1$ සරල රේඛාවට AD සමාන්තර වන පරිදි l මත වූ ලක්ෂ්‍යය D යැයි ගනිමු. D හි බණ්ඩාංක සොයන්න.



$$C \equiv \left(\frac{2(0)+1(9)}{2+1}, \frac{2(-1)+1(8)}{2+1}\right)$$

$\equiv (3,2)$ **5**

C හි බණ්ඩාංක

AB හි අනුක්‍රමණය $= 1$

l හි අනුක්‍රමණය $= -1$ **5**

l හි අනුක්‍රමණය සඳහා

$\therefore$ l හි සමීකරණය

$$y - 2 = -1(x - 3)$$

එනම්, $x + y - 5 = 0$. ---------- (1) **5**

l හි සමීකරණය ලබා ගැනීමට පියවර සඳහා

AD හි සමීකරණය $y - (-1) = 5(x - 0)$ **5**

D හි බණ්ඩාංක ලබා ගැනීමට පියවර සඳහා

එනම්, $y + 1 = 5x$ ---------- (2)

(1) හා (2) විසඳීමෙන්

$D \equiv (1,4)$. **5**

$D \equiv (1,4)$ තිබීම

Department of Examinations - Sri Lanka

9. $x+2y=3$ සරල රේඛාව, $S \equiv x^2+y^2-4x+1=0$ වෘත්තය ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙකකදී ඡේදනය කරන බව පෙන්වන්න.
මෙම ලක්ෂ්‍ය දෙක හා $S=0$ වෘත්තයෙහි කේන්ද්‍රය හරහා යන වෘත්තයෙහි සමීකරණය සොයන්න.

විකල්ප ක්‍රමය:

5 5

කේන්ද්‍රයේ සිට ලම්බ දුර < අරය

සන්සන්දනයට 5

$S \equiv x^2+y^2-4x+1=0$

$x+2y-3=0$ රේඛාව ℓ යැයි ගනිමු.

ℓ මත: $x=3-2y$;

$$(3-2y)^2+y^2-4(3-2y)+1=0$$

$$\therefore \quad 5y^2-4y-2=0 \quad (5)$$ වර්ගජ සමීකරණය ලබා ගැනීමට

මෙම වර්ගජ සමීකරණයේ විවේචක, $\Delta=16+4(5)(2)$ (5) විවේචකය ලිවීම

$\Delta>0$ නිසා $x+2y=3$ රේඛාව ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍යය දෙකකදී S ඡේදනය කරයි. (5) $\Delta>0$ සඳහා

අවශ්‍ය වෘත්තයේ සමීකරණය (5) λ ආකාරය සඳහා

$x^2+y^2-4x+1+\lambda(x+2y-3)=0$ ලෙස ලිවිය හැක;

මෙහි $\lambda \in \mathbb{R}$ වේ.

මෙම වෘත්තය, $(2,0)$ හරහා ගමන් කරන නිසා

$$4-8+1+\lambda(2-3)=0$$

$$\therefore \lambda=-3 \quad (5)$$ $\lambda=-3$ ලබා ගැනීමට

$\therefore$ අවශ්‍ය වෘත්තයේ සමීකරණය

$$x^2+y^2-4x+1+(-3)(x+2y-3)=0$$

එනම්, $x^2+y^2-7x-6y+10=0$.

Department of Examinations - Sri Lanka

10. $2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x - 1$ යන්න $R\cos(2x-\alpha)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $R>0$ හා $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ වේ.
ඒ නයින්, $\cos^2 x + \sqrt{3}\sin x\cos x = 1$ සමීකරණය විසඳන්න.

$2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x - 1$

$= 2\cos^2 x - 1 + \sqrt{3}(2\sin x\cos x)$

$= \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x$ **5**

$\cos 2x$ හා $\sin 2x$ භාවිතයෙන් ප්‍රකාශන ලිවීමට

$= 2\left[\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right]$

$= 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

මෙහි $R = 2$ හා $\alpha = \frac{\pi}{3}$

5 **5**

$R = 2$ ලබා ගැනීමට

$\alpha = \frac{\pi}{3}$ ලබා ගැනීමට

$\cos^2 x + \sqrt{3}\sin x = 1$ සමීකරණය

$2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x - 1 = 1$ ට තුල්‍ය වේ.

$\therefore \quad 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$

ඒ නයින්, $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ **5**

$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ ලබා ගැනීමට

$\therefore \quad 2x - \frac{\pi}{3} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}; \quad n \in \mathbb{Z}$

$\therefore \quad x = n\pi + \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{6}; \quad n \in \mathbb{Z}$ **5**

නිවැරදි පිළිතුර ලබා ගැනීමට

Department of Examinations - Sri Lanka

11. (a) $k>1$ යැයි ගනිමු. $x^2-2(k+1)x+(k-3)^2=0$ සමීකරණයට තාත්ත්වික ප්‍රභින්න මූල ඇති බව පෙන්වන්න. මෙම මූල α හා β යැයි ගනිමු. k ඇසුරෙන් $\alpha+\beta$ හා $\alpha\beta$ ලියා දක්වා, α හා β දෙකම ධන වන පරිදි වූ k හි අගයන් සොයන්න.
දැන්, $1<k<3$ යැයි ගනිමු. k ඇසුරෙන්, $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ හා $\frac{1}{\sqrt{\beta}}$ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය සොයන්න.

(b) $f(x)=2x^3+ax^2+bx+1$ හා $g(x)=x^3+cx^2+ax+1$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a,b,c\in\mathbb{R}$ වේ. $(x-1)$ මගින් $f(x)$ බෙදූ විට ශේෂය 5 බව හා x^2+x-2 මගින් $g(x)$ බෙදූ විට ශේෂය $x+1$ බව දී ඇත. a,b හා c හි අගයන් සොයන්න.
තවද, a,b හා c සඳහා මෙම අගයන් සහිතව, සියලු $x\in\mathbb{R}$ සඳහා $f(x)-2g(x)\le\frac{13}{12}$ බව පෙන්වන්න.

(a)

$x^2-2(k+1)x+(k-3)^2=0$ හි විවේචකය Δ යැයි ගනිමු.

එවිට $\Delta=4(k+1)^2-4(k-3)^2$ **5**

$=4(k+1+k-3)(k+1-k+3)$

$=32(k-1)$. **5**

$k>1$ නිසා $\Delta>0$ වේ. **5**

$\therefore$ දෙන ලද සමීකරණයට ප්‍රභින්න තාත්ත්වික මූල දෙකක් ඇත. **5**

20

$\alpha+\beta=2(k+1)$ හා $\alpha\beta=(k-3)^2$ **5** + **5**

α හා β දෙකම ධන වීම සඳහා

$\alpha+\beta>0$ හා $\alpha\beta>0$ විය යුතුයි. **10**

$k>1$ නිසා $\alpha+\beta=2(k+1)>0$ වේ. **5**

හා $\alpha\beta=(k-3)^2>0$ ම නම් පමණක් $k\neq3$ වේ. **10**

$\therefore$ අවශ්‍ය k හි අගයන් $1<k<3$ හෝ $k>3$ වේ.



35

දැන් $1<k<3$ යැයි ගනිමු. $\alpha>0$ සහ $\beta>0$ බව දනිමු.

Department of Examinations - Sri Lanka

$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ හා $\frac{1}{\sqrt{\beta}}$ මූල වන සමීකරණය $\left(x-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)=0$ වේ. (5)

එනම්, $x^2-\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)x+\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}=0.$ (5)

එනම්, $\sqrt{\alpha\beta}x^2-\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)x+1=0.$ (5)

(5)

$\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{(k-3)^2}=|k-3|=3-k$ බව දනිමු ($\because$ }).

තවද, $\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}$ (5)

$=2(k+1)+2(3-k)$ (5)

$=8.$ (5)

$\therefore \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=2\sqrt{2}$ (5) $(\because \quad \beta>0.)$

$\therefore$ අවශ්‍ය සමීකරණය $(3-k)x^2-2\sqrt{2}x+1=0$ වේ. (5)

45

(b)

$f(x)=2x^3+ax^2+bx+1$ හා $g(x)=x^3+cx^2+ax+1$

$f(x)$ යන්න $(x-1)$න් බෙදූ විට ශේෂය 5 නිසා ශේෂ ප්‍රමේය මඟින්

$f(1)=5.$ (5)

$\therefore \quad a+b+3=5$

$a+b=2.$ (5) ---------- (1)

$g(x)$ යන්න x^2+x-2 න් බෙදූ විට ශේෂය $x+1$ නිසා

$\lambda\in\mathbb{R}$ සඳහා $g(x)=x^3+cx^2+ax+1=(x^2+x-2)(x+\lambda)+x+1$ (5)

$\left((x^0)\right); \quad 1=-2\lambda+1 \Rightarrow \lambda=0.$

$\therefore g(x)=x(x^2+x-2)+x+1$

$=x^3+x^2-x+1.$

ඒ නයින්, $c=1$ හා $a=-1$ වේ. (5) + (5)

දැන් (1) මඟින් $b=3$ වේ. (5)

30

Department of Examinations - Sri Lanka

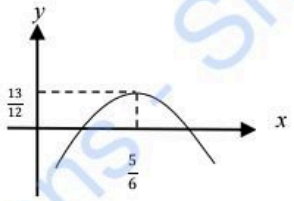
$$f(x)-2g(x)=2x^3-x^2+3x+1-2(x^3+x^2-x+1)$$

$$=-3x^2+5x-1 \quad \textbf{5}$$

$$=-3\left[\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{25}{36}+\frac{1}{3}\right]$$

$$=-3\left[\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{13}{36}\right] \quad \textbf{5}$$

$$\leq -3 \times \left(\frac{-13}{36}\right), \because \left(x-\frac{5}{6}\right)^2 \geq 0. \quad \textbf{5}$$



$$\therefore\ f(x)-2g(x) \leq \frac{13}{12}. \quad \textbf{5}$$

20

Department of Examinations - Sri Lanka

12. (*a*) පහත දී ඇති සංඛ්‍යාංක 10 න් ගනු ලබන සංඛ්‍යාංක 4 කින් සමන්විත, සංඛ්‍යාංක 4 ක සංඛ්‍යාවක් සෑදීමට අවශ්‍යව ඇත:

1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5

(i) තෝරා ගනු ලබන සංඛ්‍යාංක 4 ම වෙනස් නම්,

(ii) ඕනෑම සංඛ්‍යාංක 4 ක් තෝරාගත හැකි නම්,

සෑදිය හැකි එවැනි වෙනස් සංඛ්‍යාංක 4 ක සංඛ්‍යා ගණන සොයන්න.

(*b*) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{-16r^3+12r^2+40r+9}{5(2r+1)^2(2r-1)^2}$ යැයි ගනිමු.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{A(r-1)}{(2r+1)^2} - \dfrac{(r-B)}{(2r-1)^2}$ වන පරිදි A හා B තාත්ත්වික නියතයන් හි අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\dfrac{1}{5^{r-1}}U_r = f(r) - f(r-1)$ වන පරිදි $f(r)$ සොයා,

$n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{5^{r-1}}U_r = 1 + \frac{n-1}{5^n(2n+1)^2}$ බව පෙන්වන්න.

$\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{5^{r-1}}U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව **අපෝහනය** කර එහි එකතුව සොයන්න.

(a)

1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5

(i) 1,2,3,4 හා 5 අතරින් වෙනස් සංඛ්‍යාංක 4කින් සෑදිය හැකි වෙනස් සංඛ්‍යා ගණන

$= {}^5P_4$ **5**

$= 5!$ **5**

$= 120$ **5**

15

Department of Examinations - Sri Lanka

(ii) ඕනෑම සංඛ්‍යාංක 4ක් තෝරාගෙන සෑදිය හැකි සංඛ්‍යා ගණන

	එවැනි වෙනත් සංඛ්‍යාංක 4ක සංඛ්‍යා ගණන
වෙනස් සංඛ්‍යාංක හතරකින්	${}^5P_4 = 120$
එක් සංඛ්‍යාංකයක් පමණක් දෙවරක් පුනරාවර්තව සහ අනෙක් සංඛ්‍යාංක දෙක වෙනස්	**10** **5** ${}^4C_1 \times {}^4C_2 \times \frac{4!}{2!} = 288$
සංඛ්‍යාංක දෙකක් දෙවරක් පුනරාවර්තව	**10** ${}^4C_2 \times \frac{4!}{2!2!} = 36$ **5**
එක් සංඛ්‍යාංකයක් තෙවරක් පුනරාවර්තව	**10** ${}^1C_1 \times {}^4C_1 \times \frac{4!}{3!} = 16$ **5**

$\therefore$ සෑදිය හැකි සංඛ්‍යා ගණන $= 120 + 288 + 36 + 16$ **5**

$= 460$ **5**

55

(b)

$r \in \mathbb{Z}$ සඳහා

$$U_r = \frac{-16r^3 + 12r^2 + 40r + 9}{5(2r+1)^2(2r-1)^2}$$

$$U_r = \frac{A(r-1)}{(2r+1)^2} - \frac{(r-B)}{(2r-1)^2} = \frac{A(r-1)(2r-1)^2 - (r-B)(2r+1)^2}{(2r+1)^2(2r-1)^2}$$

$$\therefore -16r^3 + 12r^2 + 40r + 9 = 5A(r-1)(4r^2 - 4r + 1) - 5(r-B)(4r^2 + 4r + 1)$$

r හි බලවල සංගුණක සැසඳීමෙන්

$r^3 : -16 = 5A(4) - 20$

$r^2 : 12 = 5A(-8) - 5(-4B + 4)$

$r^1 : 40 = 25A - 5(1 - 4B)$

$r^0 : 9 = -5A + 5B$ **10**

Department of Examinations - Sri Lanka

$A=\frac{1}{5}$ සහ $B=2$

(5) (5)

20

$\therefore U_r=\frac{r-1}{5(2r+1)^2}-\frac{r-2}{(2r-1)^2}$ (5)

$\therefore \frac{1}{5^{r-1}}U_r=\frac{r-1}{5^r(2r+1)^2}-\frac{r-2}{5^{r-1}(2r-1)^2}$ (5)

හා ඒ නයින්,

$\frac{1}{5^{r-1}}U_r=f(r)-f(r-1)$; මෙහි $f(r)=\frac{r-1}{5^r(2r+1)^2}$ වේ. (10)

$r=1;\quad \frac{1}{5^0}U_1=f(1)-f(0)$

$r=2;\quad \frac{1}{5}U_2=f(2)-f(1)$ } (5)

$\vdots \qquad \vdots$

$r=n-1;\quad \frac{1}{5^{n-2}}U_{n-1}=f(n-1)-f(n-2)$

$r=n\quad \frac{1}{5^{n-1}}U_n=f(n)-f(n-1)$ } (5)

$n\in\mathbb{Z}$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{5^{r-1}}U_r=f(n)-f(0)$ (5)

$=\frac{n-1}{5^n(2n+1)^2}-(-1)$ (5)

$=1+\frac{n-1}{5^n(2n+1)^2}$ (5)

45

Department of Examinations - Sri Lanka

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{5^{r-1}}U_r = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n-1}{5^n(2n+1)^2}\right)$$

5 $= 1$. **5**

$\therefore \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{5^{r-1}}U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී වන අතර එහි එකතුව 1 වේ. **5**

15

Department of Examinations - Sri Lanka

13. (*a*) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & 0 & 3 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$ හා $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a \in \mathbb{R}$ වේ.

$\mathbf{C}=\mathbf{AB}^{\mathbf{T}}$ යැයි ද ගනිමු. a ඇසුරෙන් $\mathbf{C}$ සොයා, සියලු $a \neq 0$ සඳහා $\mathbf{C}^{-1}$ පවතින බව පෙන්වන්න.

a ඇසුරෙන් $\mathbf{C}^{-1}$, එය පවතින විට, ලියා දක්වන්න.

$\mathbf{C}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 9 \\ -11 \end{pmatrix}$ නම්, $a = 2$ බව පෙන්වන්න.

a සඳහා මෙම අගය සහිතව, $\mathbf{DC} - \mathbf{C}^{\mathbf{T}}\mathbf{C} = 8\mathbf{I}$ වන පරිදි $\mathbf{D}$ න්‍යාසය සොයන්න; මෙහි $\mathbf{I}$ යනු ගණය 2 වන ඒකක න්‍යාසය වේ.

(*b*) $z_1 = 1+\sqrt{3}i$ හා $z_2 = 1+i$ යැයි ගනිමු. $\frac{z_1}{z_2}$ යන්න $x + iy$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $x, y \in \mathbb{R}$.

තවද, z_1 හා z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා $r > 0$ හා $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ වන $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කර,

ඒ නයින්, $\frac{z_1}{z_2}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ බව පෙන්වන්න.

$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(*c*) $n \in \mathbb{Z}^+$ ද $k \in \mathbb{Z}$ සඳහා $\theta \neq 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ යැයි ද ගනිමු.

ද මුවාවර් ප්‍රමේයය භාවිතයෙන්, $(1+i\tan\theta)^n = \sec^n\theta(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $(1-i\tan\theta)^n$ සඳහා එවැනි ප්‍රකාශනයක් ලබා ගෙන

$(1+i\tan\theta)^n + (1-i\tan\theta)^n = 2\sec^n\theta\cos n\theta$ බව පෙන්වන්න.

$z=i\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)$ යන්න $(1+z)^{25} + (1-z)^{25} = 0$ හි විසඳුමක් බව **අපෝහනය** කරන්න.

(*a*) **5**

$$C = AB^T = \begin{pmatrix} a & 0 & 3 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+3 & a+3 \\ a+1 & 1 \end{pmatrix}$$ **10**

$$|C| = (a^2+3)-(a+1)(a+3) = -4a$$

$\neq 0$ ($\because$ **5**)

$\therefore$ සියලු $a \neq 0$ සඳහා C^{-1} පවතී. **5**

25

$$a \neq 0 \text{ සඳහා } C^{-1} = -\frac{1}{4a}\begin{pmatrix} 1 & -(a+3) \\ -(a+1) & a^2+3 \end{pmatrix}$$ **10**

$$C^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4a}\begin{pmatrix} -1 & a+3 \\ a+1 & -a^2-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4a}\begin{pmatrix} 2a+5 \\ -2a^2+a-5 \end{pmatrix}$$

10

4 ම නිවැරදි නම් **10**

3 ක් පමණක් නිවැරදි නම් **5**

4 ම නිවැරදි නම් **10**

3 ක් පමණක් නිවැරදි නම් **5**

Department of Examinations - Sri Lanka

$\therefore \frac{1}{4a}\begin{pmatrix} 2a+5 \\ -2a^2+a-5 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 9 \\ -11 \end{pmatrix}$ **10**

$\frac{2a+5}{4a} = \frac{9}{8}$ හා $\frac{-2a^2+a-5}{4a} = -\frac{11}{8}$ **5**

මෙම සමීකරණ දෙක මගින් $a = 2$ වේ. **5**

20

2 ම නිවැරදි නම් **10**

1 ක් පමණක් නිවැරදි නම් **5**

5

$a = 2$ විට $C = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ හා $C^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$.

$DC - C^TC = 8I \Leftrightarrow D - C^T = 8IC^{-1}$ **5**

5

$\therefore D = C^T + 8C^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + 8\left(-\frac{1}{8}\right)\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$. **5**

20

(b)

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+\sqrt{3}i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)(1-i) = \underbrace{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}_{x} + i\underbrace{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)}_{y}$ **5**

5

10

$z_1 = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ **5**

5

$z_2 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ **5**

5

$\therefore \frac{z_1}{z_2} = \frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right)$

$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ **10**

30

Department of Examinations - Sri Lanka

තාත්ත්වික කොටස් සමාන කිරීම මඟින්

$$\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \cos\frac{\pi}{12}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \quad (5)$$

05

(*c*)

$n\in\mathbb{Z}$ හා $\theta\neq 2k\pi\pm\frac{\pi}{2}$ සඳහා

$$(1+i\tan\theta)^n=\frac{1}{\cos^n\theta}(\cos\theta+i\sin\theta)^n \quad (5)$$

$$=\sec^n\theta(\cos n\theta+i\sin n\theta) \text{ ---------- } (1) \quad (5)$$

10

$$(1-i\tan\theta)^n=\left(1+i\tan(-\theta)\right)^n$$

$$=\sec^n(-\theta)\left[\cos n(-\theta)+i\sin n(-\theta)\right]$$

$$=\sec^n\theta(\cos n\theta-i\sin n\theta) \text{ ---------- } (2) \quad (5)$$

(1) හා (2) මඟින් $(1+i\tan\theta)^n+(1-i\tan\theta)^n=2\sec^n\theta\cos n\theta$ ලැබේ. (5)

10

$z=i\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)$ මඟින්

$$(1+z)^{25}+(1-z)^{25}=\left(1+i\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)\right)^{25}+\left(1-i\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)\right)^{25}$$

$$=2\sec^{25}\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos 25\left(\frac{\pi}{10}\right) \quad (5)$$

$$=0, \text{ as } \cos 25\left(\frac{\pi}{10}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0. \quad (5)$$

10

Department of Examinations - Sri Lanka

14. (*a*) $x \neq 0, 2$ සඳහා $f(x) = \dfrac{4x+1}{x(x-2)}$ යැයි ගනිමු.

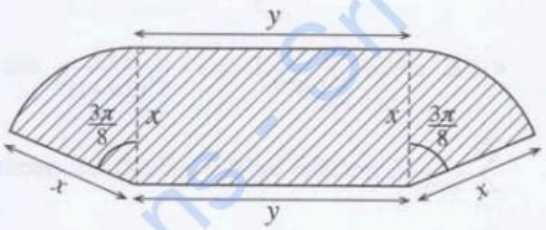
$x \neq 0, 2$ සඳහා $f(x)$ හිව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)$ යන්න $f'(x) = -\dfrac{2(2x-1)(x+1)}{x^2(x-2)^2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $f(x)$ වැඩි වන ප්‍රාන්තර හා $f(x)$ අඩු වන ප්‍රාන්තර සොයන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ, x-අන්තඃඛණ්ඩය හා හැරුම් ලක්ෂ්‍ය දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

මෙම ප්‍රස්තාරය භාවිතයෙන්, $f(x) + |f(x)| > 0$ අසමානතාව තෘප්ත කරන x හි සියලුම තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.

(*b*) යාබද රූපයෙහි අඳුරු කළ S පෙදෙසින් සෘජුකෝණාස්‍රයකින් හා කේන්ද්‍රයෙහි $\dfrac{3\pi}{8}$ ක කෝණයක් ආපාතනය කරන වෘත්තයක කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩ දෙකකින් සමන්විත ගෙවත්තක් දැක්වේ. එහි මාන, මීටරවලින්, රූපයෙහි දක්වා ඇත. S හි වර්ගඵලය $36\ \text{m}^2$ බව දී ඇත. S හි පරිමිතිය p m යන්න $x > 0$ සඳහා $p = 2x + \dfrac{72}{x}$ මගින් දෙනු ලබන බව ද, $x = 6$ විට p අවම වන බව ද පෙන්වන්න.



(*a*)

$x \neq 0, 2,$ සඳහා $f(x) = \dfrac{4x+1}{x(x-2)}$

එවිට, $f^1(x) = \dfrac{4x(x-2) - (4x+1)(x-2+x)}{x^2(x-2)^2}$ **20**

$= -\dfrac{2(2x^2+x-1)}{x^2(x-2)^2}$

$= -\dfrac{2(2x-1)(x+1)}{x^2(x-2)^2}$, $x \neq 0, 2$ සඳහා.

5

25

Department of Examinations - Sri Lanka

හැරවුම් ලක්ෂ්‍යවල දී:

$f^1(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-1 \quad x=\frac{1}{2}$ **5**

	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < x < 2$	$2 < x < \infty$
$f^1(x)$ හි ලකුණ	$(-)$	$(+)$	$(+)$	$(-)$	$(-)$
$f(x)$	↘ අඩු වේ	↗ වැඩි වේ	↗ වැඩි වේ	↘ අඩු වේ	↘ අඩු වේ
	5	**5**	**5**	**5**	**5**

$\therefore f(x)$ යන්න $[-1,0)$ හා $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ මත වැඩි වන අතර

$(-\infty,-1]$, $\left[\frac{1}{2},2\right)$ හා $(2,\infty)$ මත අඩු වේ.

30

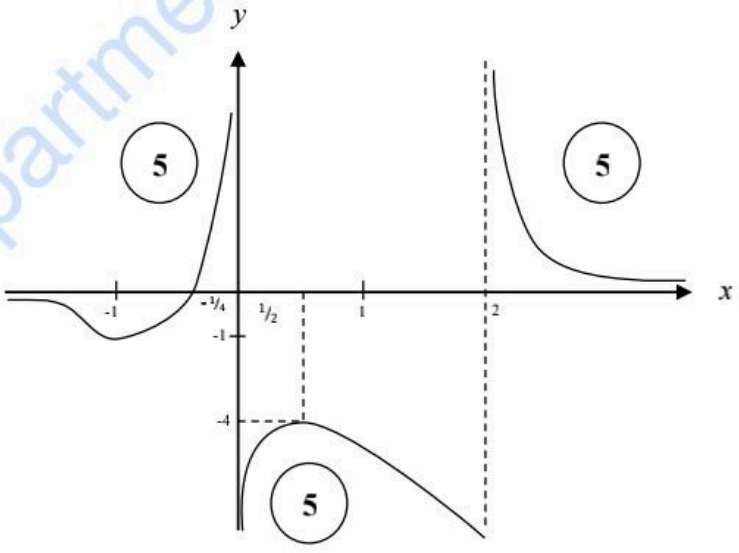
හැරුම් ලක්ෂ්‍ය: $\left(\frac{1}{2},-4\right)$ ස්ථානීය උපරිමයක් වේ. **5**

$(-1,-1)$ ස්ථානීය අවමයක් වේ. **5**

x - අන්තඃඛණ්ඩය : $\left(-\frac{1}{4},0\right)$ **5**

තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0 \ \therefore \ y=0$ **5**

සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය: $x=0$ සහ $x=2$. **5**



40

Department of Examinations - Sri Lanka

$f(x)+|f(x)| = \begin{cases} 2f(x), & f(x) \geq 0 \text{ විට.} \\ 0, & f(x) < 0 \text{ විට.} \end{cases}$

$\therefore f(x)+|f(x)|>0$ ම නම් පමණක් $f(x)>0$.

$\therefore$ $f(x)+|f(x)|>0$ තෘප්ත කරන තාත්ත්වික අගයන්

$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{4}<x<0 \text{ or } x>2.$ **5**

10

15

(b)

$x>0$ සඳහා;

$36 = xy+\frac{3}{8}\pi x^2$ **10**

$\therefore \quad y = \frac{36}{x}-\frac{3}{8}\pi x$, $x>0$ සඳහා

$p = 2x+2y+2\left(\frac{3}{8}\pi x\right)$ **10**

$= 2x+2\left(\frac{36}{x}-\frac{3}{8}\pi x\right)+\frac{3}{4}\pi x$

$\therefore p = 2x+\frac{72}{x}$ **5**

$\frac{dp}{dx} = 2-\frac{72}{x^2}; \quad x>0.$

5

$\frac{dp}{dx}=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=6.$ **5**

$0<x<6$ සඳහා $\frac{dp}{dx}<0$ සහ

$x>6$ සඳහා $\frac{dp}{dx}>0.$

$\therefore$ $x=6$ විට p අවම වේ. **5**

40

Department of Examinations - Sri Lanka

15. (*a*) සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $x^4+3x^3+4x^2+3x+1 = A(x^2+1)^2 + Bx(x^2+1) + Cx^2$ වන පරිදි A, B හා C නියතයන් හි අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, $\dfrac{x^4+3x^3+4x^2+3x+1}{x(x^2+1)^2}$ යන්න හින්න භාගවලින් ලියා දක්වා,

$\displaystyle\int \frac{x^4+3x^3+4x^2+3x+1}{x(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$ සොයන්න.

(*b*) $\displaystyle I = \int_0^{\frac{1}{4}} \sin^{-1}\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$ යැයි ගනිමු. $\displaystyle I = \frac{\pi}{24} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x$ බව පෙන්වා **ඒ නයින්**, I අගයන්න.

(*c*) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\ln(x^2+1)+2\tan^{-1}x-2x\right) = \ln(x^2+1)$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\int \ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x$ සොයා, $\displaystyle\int_0^1 \ln(x^2+1)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\ln 4+\pi-4\right)$ බව පෙන්වන්න.

a නියතයක් වන $\displaystyle\int_0^a f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a f(a-x)\mathrm{d}x$ ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන්

$\displaystyle\int_0^1 \ln\left[(x^2+1)(x^2-2x+2)\right]\mathrm{d}x$ හි අගය සොයන්න.

(*a*)

$$x^4+3x^3+4x^2+3x+1 = A(x^2+1)^2 + Bx(x^2+1) + Cx^2$$
$$= A(x^4+2x^2+1) + B(x^3+x) + Cx^2$$

x හි බලවල සංගුණක සැසඳූ විට;

x^0 : $1 = A$

x : $3 = B$

x^2 : $4 = 2A+C$ (5) + (5)

$x^3 : 3 = B$

$x^4 : 1 = A$

$\therefore A = 1,\ B = 3$ හා $C = 2$. (5)

15

Department of Examinations - Sri Lanka

$$\frac{x^4+3x^3+4x^2+3x+1}{x(x^2+1)^2}=\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2+1}+\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$ **10**

$$\int\frac{x^4+3x^3+4x^2+3x+1}{x(x^2+1)^2}=\int\frac{1}{x}\,dx+3\int\frac{1}{x^2+1}\,dx+2\int\frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx.$$ **5**

$$=\ln|x|+3\tan^{-1}x-\frac{1}{x^2+1}+E,$$ මෙහි E යනු අභිමත නියතයක් වේ.

5 **5** **5** **5**

35

(*b*)

$$I=\int_0^{\frac{1}{4}}\sin^{-1}(\sqrt{x})dx$$

$$=x\sin^{-1}\left(\sqrt{x}\right)\Big|_0^{\frac{1}{4}}-\int_0^{\frac{1}{4}}x\frac{1}{\sqrt{1-x}}.\frac{1}{2\sqrt{x}}dx.$$ **10**

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$$ **5**

$$=\frac{\pi}{24}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$$ **5**

20

$\sqrt{x}=\sin\theta$ යැයි ගනිමු. එවිට $dx=2\sin\theta\cos\theta d\theta$

5

$x=0$ විට දී, $\theta=0$.

$x=\frac{1}{4}$ විට දී, $\theta=\frac{\pi}{6}$ **5**

$$\int_0^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\;2\sin\theta\cos\theta d\theta$$ **5**

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1-\cos 2\theta)d\theta$$ **5**

Department of Examinations - Sri Lanka

$$= \left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta \right) \Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{6}}$$ **5**

$$= \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$ **5**

$$\therefore I = \frac{\pi}{24} - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = -\frac{\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{24}.$$

5 **35**

(c)

$$\frac{d}{dx}(x\ln(x^2+1) + 2\tan^{-1}x - 2x)$$

$$= x\left(\frac{1}{x^2+1} \right)(2x) + \ln(x^2+1) + \frac{2}{1+x^2} - 2$$ **10**

$$= \ln(x^2+1) + \underbrace{\frac{2x^2 + 2 - 2(1+x^2)}{1+x^2}}_{=0}$$

$$= \ln(x^2+1).$$ **5** **15**

$\int \ln(x^2+1)dx = x\ln(x^2+1) + 2\tan^{-1}x - 2x + C$, මෙහි C යනු අභිමත නියතයක් වේ. **5**

$$\therefore \int_0^1 \ln(x^2+1)dx = \ln 2 + 2\left(\frac{\pi}{4} \right) - 2$$ **5**

$$= \ln 2 + \frac{\pi}{2} - 2$$

$$= \frac{1}{2}(2\ln 2 + \pi - 4)$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 4 + \pi - 4)$$ **5** **15**

Department of Examinations - Sri Lanka

$$\int_0^1 \ln\left[(x^2+1)(x^2-2x+2)\right]dx$$

$$= \int_0^1 \ln(x^2+1) \; + \; \int_0^1 \ln(x^2-2x+2)dx \qquad \textbf{5}$$

දැන්, $\int_0^1 \ln(x^2-2x+2)dx$

$$= \int_0^1 \ln\left((1-x)^2-2(1-x)+2\right)dx$$

$$= \int_0^1 \ln(x^2+1)dx \qquad \textbf{5}$$

$$\therefore \int_0^1 \ln\left[(x^2+1)(x^2-2x+2)\right]dx = 2\int_0^1 \ln(x^2+1)dx$$

$$= \ln 4 + \pi - 4 \qquad \textbf{5}$$

15

Department of Examinations - Sri Lanka

16. $P \equiv (x_1, y_1)$ ද l යනු $ax+by+c=0$ මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛාව ද යැයි ගනිමු. P ලක්ෂ්‍යය හරහා යන හා l ට ලම්බ වූ රේඛාව මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක බණ්ඩාංක (x_1+at, y_1+bt) මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න; මෙහි $t \in \mathbb{R}$ වේ.

P හි සිට l ට ලම්බ දුර $\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

l යනු $x+y-2=0$ සරල රේඛාව යැයි ගනිමු. $A \equiv (0,6)$ හා $B \equiv (3,-3)$ ලක්ෂ්‍ය l හි දෙපස පිහිටන බව පෙන්වන්න.

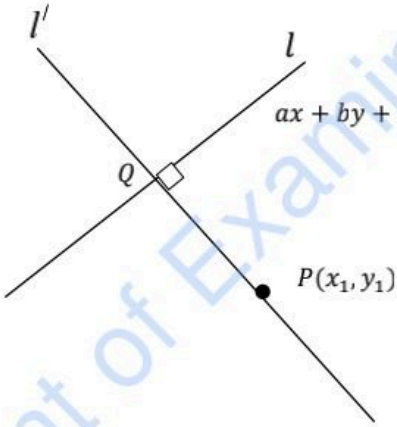
l හා AB රේඛාව අතර සුළු කෝණය සොයන්න.

l ස්පර්ශ කරන, පිළිවෙළින් A හා B කේන්ද්‍ර සහිත S_1 හා S_2 වෘත්තවල සමීකරණ සොයන්න.

l හා AB රේඛාවේ ඡේදන ලක්ෂ්‍යය C යැයි ගනිමු. C හි බණ්ඩාංක සොයන්න.

S_1 හා S_2 ට C හරහා වූ අනෙක් පොදු ස්පර්ශකයේ සමීකරණය ද සොයන්න.

මූල ලක්ෂ්‍යය හරහා යන, S_1 හි පරිධිය සමච්ඡේද කරන හා S_2 ට ප්‍රලම්බ වෘත්තයේ සමීකරණය $3x^2+3y^2-38x-22y=0$ බව පෙන්වන්න.



$(a^2+b^2 \neq 0)$

l' හි සමීකරණය: $y-y_1=\dfrac{b}{a}(x-x_1)$. **5**

$\therefore \dfrac{y-y_1}{b}=\dfrac{x-x_1}{a}=t$ (ලෙස ගනිමු) **5**

එවිට, $x=x_1+at,\ y=y_1+bt$ **5**

($a=0$ හා $b \neq 0$ හෝ $a \neq 0$ හා $b=0$ විට ද මෙය වලංගු වේ.)

15

Department of Examinations - Sri Lanka

l හා l' හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය $Q \equiv (x_2, y_2) \equiv (x_1 + at_1, y_1 + bt_1)$ යැයි ගනිමු.

Q, l මත බැවින් $a(x_1 + at_1) + b(y_1 + bt_1) + c = 0$.

$$\therefore t_1 = -\frac{(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2}. \quad \textbf{5}$$

P සිට l ට ලම්බ දුර $= PQ$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \textbf{5}$$

$$= \sqrt{a^2 t_1^2 + b^2 t_1^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2}\,|t_1|. \quad \textbf{5}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2}.\ \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{(a^2 + b^2)}$$

$$= \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad \textbf{5}$$

20

$\ell \quad 2 = 0$ **5**

$(0 + 6 - 2)(3 - 3 - 2) = -8 < 0$ **5** $\quad \therefore A$ හා B, ℓ හි දෙපස පිහිටයි.

10

AB හි අනුක්‍රමණය $= -3$ **5**

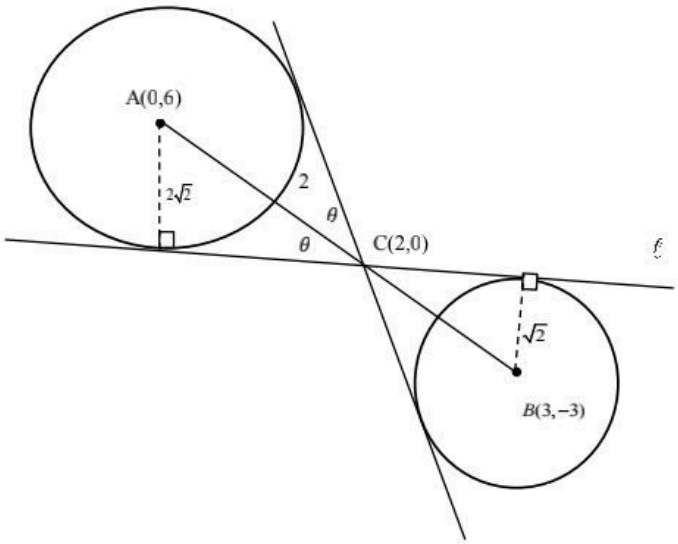
ℓ හා AB අතර සුළු කෝණය

$$\tan\theta = \left|\frac{-1 - (-3)}{1 + (-1)(-3)}\right| \quad \textbf{5}$$

$$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \quad \textbf{5}$$

15

Department of Examinations - Sri Lanka



5 5 5 5

S_1 හි අරය $= \dfrac{|0+6-2|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ හා S_2 හි අරය $= \dfrac{|3-3-2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ වේ.

$\therefore S_1 : x^2 + (y-6)^2 = 8$ **5**

එනම්, $x^2 + y^2 - 12y + 28 = 0.$

$S_2 : (x-3)^2 + (y+3)^2 = 2$ **5**

එනම්, $x^2 + y^2 - 6x + 6y + 16 = 0$

30

$AC : CB = 2\sqrt{2} : \sqrt{2} = 2:1$ **5**

$\therefore C \equiv \left(\dfrac{6+0}{3}, \dfrac{-6+6}{3}\right) = (2,0)$ **5**

m යනු අනෙක් පොදු ස්පර්ශකයේ අනුක්‍රමණය යැයි ගනිමු.

$\therefore \tan\theta = \dfrac{1}{2} = \left|\dfrac{m-(-3)}{1+m(-3)}\right|$ **5**

$\Leftrightarrow \quad 1-3m = 2m+6$ හෝ $3m-1 = 2m+6$

$\Leftrightarrow \quad m = -1$ හෝ $m = 7$

$\therefore \quad m = 7.$ **5**

$\therefore$ අවශ්‍ය සමීකරණය වන්නේ $y-0 = 7(x-2).$ **5**

එනම්, $7x - y - 14 = 0.$

25

Department of Examinations - Sri Lanka

$S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

S මූල ලක්ෂ්‍යය හරහා යන බැවින් $c = 0$. **5**

S යන්න S_1 හි පරිධිය සමච්ඡේද කරන බැවින් පොදු ජ්‍යාය A හරහා යයි.

පොදු ජ්‍යාය වන්නේ $S - S_1 \equiv 2gx + (2f + 12)y - 28 = 0$ **5**

එවිට $A \equiv (0, 6)$ යන්න $S - S_1 = 0$ මත බැවින්,

$(2f + 12)(6) - 28 = 0.$ **5**

$(f + 6)(3) - 7 = 0,$ එවිට $f = -\frac{11}{3}.$ **5**

S යන්න S_2 ට ප්‍රලම්බ බැවින්, $2g(-3) + 2f(3) = 0 + 16.$ **5**

$\therefore -3g + 3\left(\frac{-11}{3}\right) = 8, \Rightarrow g = -\frac{19}{3}.$ **5**

$\therefore$ අවශ්‍ය වෘත්තයේ සමීකරණය;

$x^2 + y^2 + 2\left(\frac{-19}{3}\right)x + 2\left(\frac{-11}{3}\right)y = 0$ **5**

එනම්, $3x^2 + 3y^2 - 38x - 22y = 0.$

35

Department of Examinations - Sri Lanka

17. (*a*) $\cos A, \cos B, \sin A$ හා $\sin B$ ඇසුරෙන් $\cos(A+B)$ හා $\cos(A-B)$ ලියා දක්වන්න.

ඒ නයින්, $\cos C + \cos D = 2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$ බව පෙන්වන්න.

$\cos C - \cos D = -2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(\frac{C-D}{2}\right)$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

$\cos 9x + \cos 7x + \cot x(\cos 9x - \cos 7x) = 0$ සමීකරණය විසඳන්න.

(*b*) සුපුරුදු අංකනයෙන්, ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා **කෝසයින නීතිය** ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.

$n \in \mathbb{Z}$ සඳහා $x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$ යැයි ගනිමු. $\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$ බව පෙන්වන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයක $AB = 20$ cm, $BC = 10$ cm හා $\sin 2B = \frac{24}{25}$ බව දී ඇත.

එවැනි වෙනස් ත්‍රිකෝණ දෙකක් තිබෙන බව පෙන්වා, ඒ එක එකක් සඳහා AC හි දිග සොයන්න.

(*c*) $\sin^{-1}\left[(1+e^{-2x})^{-\frac{1}{2}}\right] + \tan^{-1}(e^x) = \tan^{-1}(2)$ සමීකරණය විසඳන්න.

(*a*)

$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$ ⟶

$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$ ⟶ (2) (5) **10**

---

(1) + (2)

$$\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2\cos A\cos B \quad (5)$$

$A+B=C$ හා $A-B=D$, ලෙස ගැනීමෙන් $A = \frac{C+D}{2}, B = \frac{C-D}{2}$ වේ.

$\therefore \quad \cos C + \cos D = 2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$. (5) **10**

දැන්, $\cos C - \cos D = \cos C + \cos(\pi - D)$ (5)

$$= 2\cos\left(\frac{C+(\pi-D)}{2}\right)\cos\left(\frac{C-(\pi-D)}{2}\right)$$

$$= 2\sin\left(\frac{D-C}{2}\right)\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)$$

$$= -2\sin\left(\frac{C-D}{2}\right)\sin\left(\frac{C+D}{2}\right).$$ (5)

10

Department of Examinations - Sri Lanka

$\cos 9x + \cos 7x + \cot x\ (\cos 9x - \cos 7x) = 0 \qquad (\sin x \neq 0)$

$\therefore 2\cos 8x \cos x + \dfrac{\cos x}{\sin x}(-2\sin 8x \sin x) = 0$ **5**

$\therefore \cos x = 0$ හෝ $(\cos 8x - \sin 8x) = 0$ **5**

$\therefore \cos x = 0$ හෝ $\tan 8x = 1.$

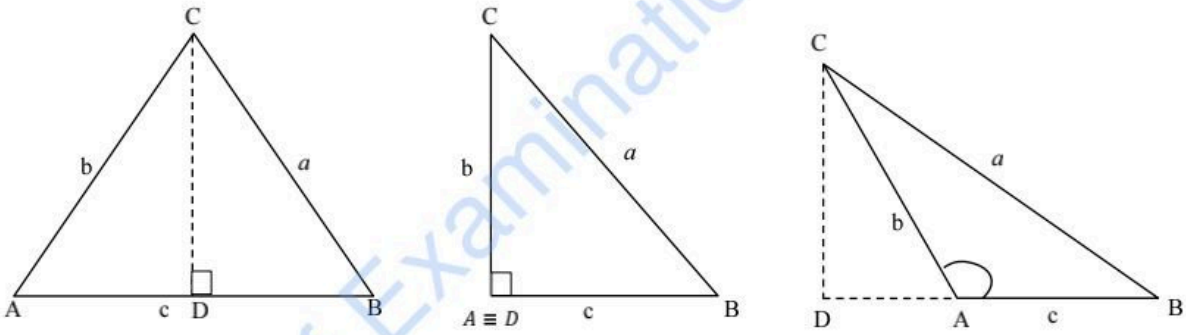
$x = 2m\pi \pm \dfrac{\pi}{2};\ m \in \mathbb{Z}$ හෝ $8x = n\pi + \dfrac{\pi}{4};\ n \in \mathbb{Z}.$

$x = 2m\pi \pm \dfrac{\pi}{2};\ m \in \mathbb{Z}$ හෝ $x = \dfrac{n\pi}{8} + \dfrac{\pi}{32};\ n \in \mathbb{Z}.$ + **5** **5** **20**

(b)

කෝසයින් නීතිය: ABC ත්‍රිකෝණයක් යැයි ගන්න **5**

එවිට $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$



සාධනය: එවිට පයිතගරස් ප්‍රමේයයෙන්,

$BC^2 = BD^2 + DC^2$ ——— **1** **5**

(i) අවස්ථාව A සුළු කෝණයක් විට;

$DC = b\sin A$

$DB = c - b\cos A$ **5**

(ii) අවස්ථාව A මහා කෝණයක් විට;

$DC = b\sin(\pi - A) = b\sin A$

$DB = c + b\cos(\pi - A) = c - b\cos A$ **5**

$\therefore$ මෙම අවස්ථා දෙකම සඳහා, **1** මඟින් $a^2 = b^2\sin^2 A + (c - b\cos A)^2$

$= b^2\sin^2 A + c^2 - 2bc\cos A + b^2\cos^2 A$

$= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \quad (\because \cos^2 A = 1)$ **5**

$A = \dfrac{\pi}{2}$ විටදී, $\cos A = 0$ බැවින් මෙම අවස්ථාවට ද වලංගු වේ. **5**

30

Department of Examinations - Sri Lanka

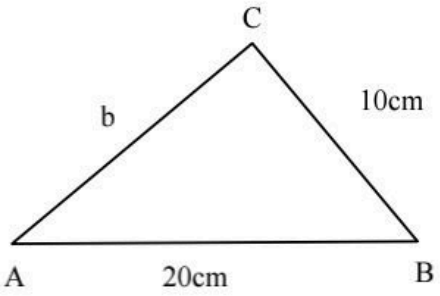
$x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$ යැයි ගනිමු. $(\cos x \neq 0)$

$\sin 2x = \frac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x} \times \cos^2 x$ (5)

$= \frac{2\tan x}{\sec^2 x}$

$= \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$ (5)

10



$\sin 2B = \frac{24}{25} \Rightarrow B$ සුළු කෝණයකි.

$\therefore \frac{2t}{1+t^2} = \frac{24}{25}$, මෙහි $t = \tan B$ (5)

$12t^2 - 25t + 12 = 0$

$(4t-3)(3t-4) = 0$

$t = \frac{3}{4}$ හෝ $\frac{4}{3}$ (5) + (5)

$\therefore B$ සඳහා වෙනස් විසඳුම් දෙකකි.

$\therefore$ එවැනි වෙනස් ත්‍රිකෝණ දෙකක් තිබේ.

B යනු සුළු කෝණයකි. $\cos B = \frac{3}{5}$ හෝ $\cos B = \frac{4}{5}$

$\cos B = \frac{3}{5}$ විට; $AC^2 = (20)^2 + 10^2 - 2(20)(10)\left(\frac{3}{5}\right) \Rightarrow AC = 2\sqrt{65}.$ (5)

$\cos B = \frac{4}{5}$ විට; $AC^2 = (20)^2 + (10)^2 - 2(20)(10)\left(\frac{4}{5}\right) \Rightarrow AC = 6\sqrt{5}.$ (5)

25

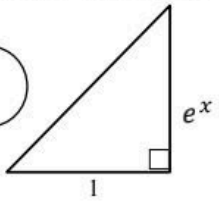
(c)

$\alpha = \sin^{-1}(1+e^{-2x})^{-\frac{1}{2}}$ යැයි ගනිමු. $(1+e^{-2x})^{-\frac{1}{2}} > 0$ බැවින් α සුළු කෝණයකි.

එවිට $\sin\alpha = \left(1+e^{-2x}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{e^x}{\sqrt{1+(e^x)^2}}$

$\therefore \tan\alpha = e^x.$ (5)

(5)



Department of Examinations - Sri Lanka

එවිට, දෙන ලද සමීකරණය $\alpha + \alpha = \lambda$ වේ.

$\therefore \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \tan\lambda$ **5**

$\Rightarrow \quad \dfrac{2e^x}{1-e^{2x}} = 2$ **5**

$\Rightarrow \quad e^x = 1 - e^{2x}$

$\Rightarrow \quad e^{2x} + e^x - 1 = 0$

$\Rightarrow \quad e^x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ **5**

$e^x > 0$ බැවින්, $(-)$ ලකුණ ගත නොහැක.

$\therefore \quad e^x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ **5**

$\therefore \quad x = \ln\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right).$ **5**

දෙන ලද සමීකරණය මෙම x අගය තෘප්ත කරයි.

35

Department of Examinations - Sri Lanka