සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
முழுப் பதிப்புரிமையுடையது]
All Rights Reserved]

12715

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம் / Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2000 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப்பத்திர(உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2000 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 2000

ශුද්ධ ගණිතය I
தூய கணிதம் I
Pure Mathematics I

05	
S	I

පැය තුනයි / மூன்று மணித்தியாலம் / Three hours

ප්‍රශ්න **හතකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

---

1. (අ) A, B යනු S සර්වත්‍ර කුලකයක උපකුලක යැයි සිතමු. සුපුරුදු අංකනයෙන්,

(i) $(A \cap B) \cup (A' \cap B') \cup (A' \cap B) \cup (A \cap B') = S$ බව ද

(ii) $A = \phi$ ම නම් පමණක් $(A \cap B') \cup (A' \cap B) = B$ බව ද

පාධනය කරන්න.

ඉහත ප්‍රතිඵල සාධනයේ දී, ඔබ උපයෝගී කරගනු ලබන කුලක වීජයේ නියම ප්‍රකාශ කළ යුතු යි.

(ආ) $f(x) = \sin^{-1}\left(\frac{x-3}{2}\right)$ සහ $g(x) = \log_{10}(4-x)$ යැයි සිතමු ; මෙහි x තාත්ත්වික වේ.

(i) f හි ත් g හි ත් වසම සොයා, ඒ නයින් $f+g$ හි වසම සොයන්න.

(ii) $f \circ g(-96)$ හි අගය කුමක් ද?

(ඇ) $f: Z \to Z$ යන්න, $f(x) = 3x + n - nx$ යන්නෙන් අර්ථ දක්වේ යැයි සිතමු ; මෙහි n යනු දී ඇති නිඛිලයකි.

(i) f එකට එක වීම

(ii) f මතට වීම

සඳහා, n හි අගයයන් සොයන්න.

කවි ද, f හි ප්‍රතිලෝම ශ්‍රිතය, එය පවතින විට සොයන්න.

2. (අ) $(x+y)^3(x-y) + (y+z)^3(y-z) + (z+x)^3(z-x)$ හි සාධක සොයන්න.

(ආ) α සහ β යනු $x^2 - bx + c = 0$ සමීකරණයේ තාත්ත්වික මූල වේ. තවද $\alpha \geq \beta$ වේ.

$\alpha - \beta = \sqrt{b^2 - 4c}$ බව පෙන්වන්න.

$(\alpha+1)$ සහ $(\beta+2)$ යනු $2x^2 - qx + r = 0$ සමීකරණයේ මූල නම්, b සහ c ඇසුරෙන් q සහ r සොයන්න.

$\alpha = \beta$ විට, $q^2 = 4(2r+1)$ බව පෙන්වන්න.

(ඇ) a, b, c යනු $(a+1)(b+1)(c+1) \neq 0$ පරිදි වූ තාත්ත්වික නියත වන අතර,

$$x + y = az + xyz$$
$$y + z = bx + xyz$$
$$z + x = cy + xyz$$

වෙයි.

$(a+1)z = (b+1)x = (c+1)y$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, a, b, c සියල්ල ම ධන ද, $bc < 1$ ද, වන අවස්ථාවේ දී x, y සහ z සඳහා ඉහත සමීකරණ තුන විසඳන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

3. (අ) $\left|\frac{2x-1}{x+1}-2\right|<1$ අසමානතාව විසඳන්න.

(ආ) n ධන නිඛිලයක් විට, $(1+x)^n$ හි ප්‍රසාරණය, x හි බලවල ආරෝහණ පරිපාටියට සැකසූ ශ්‍රේණියක් ලෙස ලියන්න.

(i) $(1+x)^{2n}$ හි සහ $(1+x)^n(1+x)^n$ හි ප්‍රසාරණ සැලකීමෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ,

$$\sum_{r=0}^{n}\left({}^nC_r\right)^2 = {}^{2n}C_n$$

බව පෙන්වන්න.

(ii) $\left(1-x^2\right)^n$ හි ප්‍රසාරණය භාවිත කිරීමෙන්, n ඔත්තේ විට, $\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\left({}^nC_r\right)^2$ සොයන්න.

[${}^nC_r$ ට සුපුරුදු අර්ථය ඇත]

4. (අ) 0, 1, 2, 4, 7, 8 සංඛ්‍යාංක යොදා ගනිමින්, පුනරාවර්ත සංඛ්‍යාංක නොමැති වූ ද එක් එක් සංඛ්‍යාව 6000 ට වැඩි වූ ද එකිනෙකට වෙනස් සංඛ්‍යා කොපමණ සෑදිය හැකි ද? (සාමාන්‍ය සම්මුතියට අනුව, සංඛ්‍යාවක ආරම්භක සංඛ්‍යාංකය 0 නොවේ.)

(ආ) එක්තරා පංතියක පිරිමි ළමයින් 7 ක් ද ගැහැනු ළමයින් 6 ක් ද සිටී. අඩුම වශයෙන් පිරිමි ළමයින් 3 දෙනෙකුවත් සිටින්නා වූ තරියටම 5 දෙනෙකුගෙන් සමන්විත කමිටුවක් සෑදිය හැකි ආකාර ගණන කවරේ ද?

[එක් එක් අවස්ථාවේ දී, ක්‍රමය පැහැදිලිව දක්විය යුතු ය.]

5. (අ) ගණිත අභ්‍යුහනය පිළිබඳ මූලධර්මය භාවිතයෙන්, ඕනෑම n ධන නිඛිලයක් සඳහා,

$$1^2-2^2+3^2+\ldots+(-1)^{n+1}n^2=(-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2}$$

බව සාධනය කරන්න.

(ආ) අපරිමිත ශ්‍රේණියක r වැනි පදය වන u_r යන්න $\frac{1}{r^2(r+2)(r+4)^2}$ වේ.

සෑම r ධන නිඛිලයක් සඳහා $u_r=f(r)-f(r+2)$ වන පරිදි වූ f ශ්‍රිතයක් සොයන්න.

$$\sum_{r=1}^{n}\left[f(r)-f(r+2)\right]=\left[f(1)+f(2)\right]-\left[f(n+1)+f(n+2)\right]$$

බව පෙන්වන්න.

$\sum u_r$ ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වා, එහි එකතුව සොයන්න.

6. (අ) $x \neq 1, -3, \frac{-5}{3}$ සඳහා,

$$f(x) = \frac{1}{|x-1|}\left(\frac{A}{x+3} - \frac{B}{3x+5}\right)$$

යැයි සිතමු ; මෙහි A සහ B නියත වේ.

$\lim_{x \to 1-} f(x) = -\frac{1}{32}$ වන පරිදි වූ A සහ B හි අගයයන් සොයන්න.

A සහ B හි ඉහත අගයයන් සඳහා, $\lim_{x \to 1+} f(x)$ නිර්ණය කරන්න.

$\lim_{x \to 1} f(x)$ පවතී ද?

(ආ) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ශ්‍රිතය,

$$g(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & ; \ x < 1 \\ \frac{1}{x} - 1 & ; \ 1 \leq x < 2 \\ (x+1)^2 & ; \ x \geq 2 \end{cases}$$

යන්නෙන් අර්ථ දක්වනු ලැබේ.

$x = 1$ දී සහ $x = 2$ දී g සන්තතික දැයි නිර්ණය කරන්න.

7. (අ) $x \ln y - y \ln x = 1$ නම් $x = 1$ විට $\frac{dy}{dx}$ සොයන්න.

(ආ) $y = xe^{-\frac{1}{x}}$ නම් $x^3 \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 0$ බව පෙන්වන්න.

(ඇ) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ශ්‍රිතය $f(x) = \sqrt{1+\cos x}$ යන්නෙන් අර්ථ දක්වනු ලැබේ. $x = \pi$ හි දී f හි අවකලනතාව පරීක්ෂා කරන්න.

$g(x) = (x-\pi)f(x)$ ශ්‍රිතය $x = \pi$ හිදී අවකලන ද නැත් ද යන්න ද නිර්ණය කරන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

8. $f(x) = \dfrac{3-4x}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$ යැයි සිතමු.

(i) ඛණ්ඩාංක අක්ෂ ඡේදනය කරන ලක්ෂ්‍යවල ඛණ්ඩාංක ද

(ii) උපරිම හා අවම ලක්ෂ්‍යවල (ඒවා තිබේ නම්) ඛණ්ඩාංක ද

(iii) $|x|$ හි විශාල අගයයන් සඳහා හැසිරීම ද

ගෙනහැර දක්වමින් $y = f(x)$ වක්‍රයේ දළ රූප සටහනක් අඳින්න.

f හි ප්‍රස්තාරය උපයෝගී කර ගනිමින්, $y = \dfrac{1}{f(x)}$ වක්‍රයේ දළ රූප සටහනක් ද අඳින්න.

ඒ නයින්, හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, $e^x f(x) = 1$ සමීකරණයට අඩුම වශයෙන් තාත්ත්වික විසඳුම් දෙකක් වත් තිබෙන බව පෙන්වන්න.

9. $\int \dfrac{1}{3} x \sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right) dx$ සහ $\int \dfrac{10(x-4)}{x^2+1}\, dx$ සොයන්න.

$f : [0,7] \to \mathbb{R}$ ශ්‍රිතය

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} x \sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right) & ; \ 0 \le x \le 3 \\ \dfrac{10(x-4)}{x^2+1} & ; \ 3 < x \le 7 \end{cases}$$

යන්නෙන් අර්ථ දක්වනු ලැබේ.

$\displaystyle\int_0^7 f(x)\,dx$ සහ $\displaystyle\int_0^7 |f(x)|\,dx$ අගයන්න.

$0 \le x \le 7$ සඳහා, $y = f(x)$ සහ $y = |f(x)|$ ප්‍රස්තාර අතර වර්ගඵලය අපෝහනය කරන්න.

10. (අ) $z = y - x$ ආදේශය භාවිත කිරීමෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, $x = 0$ විට $y = 0$ යැයි දී ඇත්නම්,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y+1}{2x-2y+3}$$

අවකල සමීකරණය විසඳන්න.

(ආ) λ පරාමිතියක් විට, $y + 3 = \dfrac{\lambda}{x^2-4}$ වක්‍ර කුලය මඟින් සපුරාලන අවකල සමීකරණයක් ලබාගන්න.

තව ද, ඉහත වක්‍ර කුලයේ ප්‍රලම්බ පරාවක්‍රයන් හි සමීකරණය ලබාගන්න

සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
முழுப் பதிப்புரிமையுடையது]
All Rights Reserved]

11827

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்/ Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2000 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப்பத்திர(உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2000 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 2000

ශුද්ධ ගණිතය II
தூய கணிதம் II
Pure Mathematics II

05	
S	II

පැය තුනයි / மூன்று மணித்தியாலம் / Three hours

ප්‍රශ්න **හතකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

---

1. (අ) $f(\lambda)=\lambda^2-2\lambda+2$ යැයි ද $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1 & -5\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ යැයි ද ගනිමු.

$f(\mathbf{A})=\mathbf{O}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $\mathbf{O}$ යනු 2 වන ගණයේ ශූන්‍ය නාහාසය යි.

$f(1+i)=0$ බව ද $(1+i)^6=-8i$ බව ද සැලකිල්ලට ගෙන, $\lambda^6\equiv f(\lambda)g(\lambda)+p\lambda+q$ වන පරිදි වූ, p සහ q තාත්ත්වික නියත දෙකෙහි අගයයන් සොයන්න ; මෙහි $g(\lambda)$ යනු යුදුසු බහුපදයකි.

$\mathbf{A}^6=8\begin{pmatrix}2 & 5\\ -1 & -2\end{pmatrix}$ බව අපෝහනය කරන්න.

(ආ) $\begin{pmatrix}4 & -6\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ නාහාසය, ද්විමානයේ ලක්ෂාවල T පරිණාමනය නිරූපණය කරයි.

(i) T යටතේ $(1,2)$ ලක්ෂායෙහි ප්‍රතිබිම්බය,

(ii) T යටතේ ප්‍රතිබිම්බය ලෙස $(18,2)$ ලැබෙන්නා වූ ලක්ෂාය,

සොයන්න.

T යටතේ කවර ලක්ෂා අවිචලක වේ ද?

[පරිණාමනයක් යටතේ ලක්ෂායක් අවිචලක යැයි කියනු ලබන්නේ එය එයට ම අනුරූපණය වුවහොත් ය.]

2. a, b යනු තාත්ත්වික සංඛ්‍යා යයි පිහමු.

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\end{vmatrix}=(a-1)(b-1)(b-a)$$ බව පෙන්වන්න.

(i) $$\Delta(x)\equiv\begin{vmatrix}1 & 1 & k\\ 1 & x & 2x\\ k & x^2 & 4x^2\end{vmatrix}$$

යැයි පිහමු ; මෙහි $k(\neq 2)$ යනු තාත්ත්වික සංඛ්‍යාවකි. $x=1$ යන්න $\Delta(x)=0$ හි විසඳුමක් වන පරිදි වූ k සොයන්න.

k හි ඉහත අගය සඳහා, $\Delta(x)=0$ විසඳන්න.

(ii) තාත්ත්වික a සඳහා,

$$\begin{aligned}x+y+z&=1\\ x+ay+2az&=1\\ x+a^2y+4a^2z&=2\end{aligned}$$

ඒකජ සමීකරණ පද්ධතියට, $a\in\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}$ නම් විසඳුමක් නොමැති බව පෙන්වා,

$a\notin\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}$ නම් අනන්‍ය විසඳුම සොයන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

3. ධන නිඛිලමය දර්ශකයක් සඳහා, ද මුවාවර් ප්‍රමේයය ප්‍රකාශකර සාධනය කරන්න.

(i) $z = \cos\theta + i\sin\theta$ නම්,

$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\theta$ බව සාධනය කරන්න; මෙහි $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ වේ.

$\omega = \cos\phi + i\sin\phi$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව $\omega^3 = i$ සපුරාලයි. $\omega^3 + \frac{1}{\omega^3} = 0$ බව පෙන්වන්න.

$\omega^3 + \frac{1}{\omega^3} = 0$ වන පරිදි වූ ϕ හි අගයයන් නිර්ණය කරන්න.

$\omega^3 = i$ සපුරාලන්නා වූ ω හි ප්‍රතිඵල අගයයන් තුනක් අපෝහනය කරන්න.

(ii) ද මුවාවර් ප්‍රමේයය යොදා,

$n \in \mathbb{Z}$ විට $\theta \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$ සඳහා,

$$\frac{\cos 6\theta}{\cos^6\theta} = 1 - 15\tan^2\theta + 15\tan^4\theta - \tan^6\theta$$

බව පෙන්වන්න.

$$\tan^6\theta - 15\tan^4\theta + 15\tan^2\theta - 1 = 0$$

වන පරිදි වූ θ හි අගයයන් නිර්ණය කරන්න.

$x^3 - 15x^2 + 15x - 1 = 0$ සමීකරණයේ මූල සැලකීමෙන්, $\tan\frac{\pi}{12}$ හි අගය ලබාගන්න.

4. $z_0 = \cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව, ආගන්ඩ් රූ පටහනෙහි A ලක්ෂ්‍යයෙන් නිරූපණය වේ.

$\omega = \frac{\cos 3\pi}{7} + i\sin\frac{3\pi}{7}$ විට $p = \omega z_0$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවට අනුරූප P ලක්ෂ්‍යය සලකුණු කරන්න.

B සහ C යනු පිළිවෙළින් z_0^3 සහ z_0^9 ට අනුරූප ලක්ෂ්‍ය වන අතර Q සහ R මගින් පිළිවෙළින් q සහ r සංඛ්‍යා නිරූපණය කරයි ; මෙහි $q = \omega z_0^3$ සහ $r = \omega z_0^9$ වේ. B, C, Q සහ R ලක්ෂ්‍ය සලකුණු කර,

(i) $A\hat{O}C = B\hat{O}C$

සහ (ii) $AC = BC$

බව පෙන්වා, $A\hat{B}C$ හි අගය ලබාගන්න.

$\text{Arg}\left(\frac{q-p}{q-r}\right) = \frac{3\pi}{7}$ බව ද $z_0 + q + z_0^3 + p + z_0^9 + r$ සංඛ්‍යාව නුදෙස් අක්ෂයේ බව ද පෙන්වන්න.

5. (අ) O මූලයකට අනුබද්ධ ව, A, B, C ලක්ෂයවල පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $-\mathbf{i}+\left(1+\sqrt{3}\right)\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\sqrt{3}\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ සහ $\mathbf{j}+\mathbf{k}$ වෙයි; මෙහි $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ට සුපුරුදු අර්ථය ඇත. A, B, C එක රේඛීය නොවන බව පෙන්වන්න.

(i) AB සහ AC හි දිග

(ii) BAC කෝණය

(iii) ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය සහ A සහ BC අතර කෙටිම දුර

(iv) BC හි මධ්‍ය ලක්ෂයට A යා කෙරෙන රේඛාවේ දෛශික සමීකරණය

සොයන්න.

(ආ) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ පිහිටුම් දෛශික සහිත A, B, C, D ලක්ෂ අතර ඒකතල වේ නම්, එවිට

$$[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]+[\mathbf{a}\,\mathbf{c}\,\mathbf{d}]=[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{d}]+[\mathbf{b}\,\mathbf{c}\,\mathbf{d}]$$

බව සාධනය කරන්න.

[මෙහි $[\mathbf{x}\,\mathbf{y}\,\mathbf{z}]$ යන්නෙන් මිනෑ ම $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ දෛශික තුනක $\mathbf{x}\times\mathbf{y}.\mathbf{z}$ අදිශ ත්‍රිත්ව ගුණිතය හැඳින්වේ.]

6. (අ) $\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{7}{24}\right)$ සහ $\beta=\tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)$ යැයි දී ඇත්නම්, $\cos(\alpha-\beta)$ සොයා ඒ හයින් $\sin(\alpha-\beta)$ ගණනය කරන්න.

(ආ) $t=\tan x$ නම්, $\sin 2x=\frac{2t}{1+t^2}$ බව පෙන්වන්න.

$(1+\sin 2x)(2-\tan x)=2$ වන පරිදි $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ප්‍රාන්තරය තුළ පිහිටි x හි අගයයන් සොයන්න.

(ඇ) $n\in\mathbf{Z}$ විට, $\theta\neq n\pi$ සඳහා,

$\operatorname{cosec}\theta+\cot\theta=\cot\frac{\theta}{2}$ බව පෙන්වන්න.

ඉහත ප්‍රතිඵලය යොද, $\operatorname{cosec}\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\operatorname{cosec}\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\operatorname{cosec}\left(\frac{8\pi}{7}\right)$ හි අගය සොයන්න.

7. (x_0, y_0) ලක්ෂයේ සිට $ax+by+c=0$ රේඛාවට ඇති ලම්බ දුර සඳහා ප්‍රකාශනයක් ලබා ගන්න.

$ax+by+c_1=0$ සහ $ax+by+c_2=0$ සමාන්තර රේඛා අතර දුර $\frac{|c_2-c_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ බව අපෝහනය කරන්න.

A යනු $3x+4y=7$ රේඛාව මත පිහිටි ලක්ෂයක් ද B සහ C යනු $3x+4y=2$ රේඛාව මත පිහිටි ලක්ෂ ද යැයි ගනිමු. මෙම ලක්ෂ තුන පිහිටා ඇත්තේ,

(i) BC ට ලම්බ ව A හරහා යන රේඛාව $(-2,-3)$ ලක්ෂය හරහා යන පරිදි ද

(ii) AB රේඛාව $y+3x=0$ රේඛාවට සමාන්තර වන පරිදි ද

(iii) ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය 1 වන පරිද ද වේ.

A සහ B හි මණ්ඩාංක නිර්ණය කරන්න.

තව ද, C ලක්ෂය සඳහා පිහිටුම් දෙකක් තිබිය හැකි බව පෙන්වා, එක් එක් අවස්ථාවේ දී C හි මණ්ඩාංක ලබා ගන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

8. $x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$ සහ $x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$ වෘත්ත දෙක ප්‍රලම්බව ඡේදනය වේ නම්, $2g_1g_2 + 2f_1f_2 = c_1 + c_2$ බව පෙන්වන්න.

$$\lambda(y - 7x)y + \mu y(4y - 4x + 3) + (4y - 4x + 3)(y - 7x) = 0$$

සමීකරණය වෘත්තයක් නිරූපණය කිරීම සඳහා λ හි සහ μ හි අගයයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, λ සහ μ හි එම අගයයන් සඳහා, මෙම සමීකරණය නිරූපණය කරනු ලබන්නේ,

$y=0$, $4y-4x+3=0$ සහ $y-7x=0$ සමීකරණ මගින් පිළිවෙළින් OA, AB සහ BO පාද දෙනු ලබන OAB ත්‍රිකෝණයේ S පරිවෘත්තය බව පෙන්වන්න.

O සහ A හි දී S වෘත්තය ප්‍රලම්බ ව ඡේදනය කරනු ලබන වෘත්තයේ සමීකරණය ලබාගන්න.

9. (අ) $x = t^2 - 1$ සහ $y = t^3 - t$ පරාමිතික සමීකරණ වලින් දෙනු ලබන C වක්‍රය සලකන්න; මෙහි $t \in \mathbb{R}$.

C වක්‍රය එයින්ම ඡේදනය වන (x, y) ලක්ෂ්‍ය සියල්ල, චිකිය ක්‍රමයකින් හෝ ඡනාමිතික ක්‍රමයකින් හෝ පොයන්න.

$t > 0$ විට, C වක්‍රය උඩු අතට අවතල බව පෙන්වන්න.

(ආ) ධ්‍රැවක ආකාරයෙන්, පිළිවෙළින් $r = 2a\cos(\theta - \alpha)$ සහ $r = \lambda\sec(\theta - \alpha)$ සමීකරණවලින් දෙනු ලබන C_1 සහ C_2 වක්‍ර දෙක විස්තර කරන්න; මෙහි a සහ α ධන නියත වන අතර $\lambda(> 0)$ යනු පරාමිතියකි.

$\lambda < 2a$ නම්, එවිට C_1 සහ C_2 වක්‍ර ලක්ෂ්‍ය දෙකක දී එකිනෙක ඡේදනය වන බව පෙන්වන්න. එම ලක්ෂ්‍ය P_1 සහ P_2 නම්, OP_1P_2 ත්‍රිකෝණයේ Δ වර්ගඵලය $\lambda\sqrt{2a\lambda - \lambda^2}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි O යනු ධ්‍රැවයයි.

ඒ නයින්, Δ සඳහා උපරිම අගයක් ගෙන දෙන λ හි අගය පොයන්න.

10. $y = mx + c$ රේඛාව, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ඉලිප්සය ස්පර්ශ කරනු ලබයි නම්, එවිට $c^2 = a^2m^2 + b^2$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින් හෝ අන්ක්‍රමයකින් හෝ, ඉහත ඉලිප්සයට $P(h, k)$ ලක්ෂ්‍යයක සිට ඇඳි ස්පර්ශක යුගලයේ සමීකරණය

$$(kx - hy)^2 = a^2(y - k)^2 + b^2(x - h)^2$$

ආකාරයට ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න.

P සිට ඇඳි ස්පර්ශක දෙක, Q සහ R ලක්ෂ්‍යවල දී x අක්ෂය ඡේදනය කරයි.

(i) QR හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය $(\alpha, 0)$ අචල ලක්ෂ්‍යය නම්, P හි පථය $\alpha y^2 = b^2(\alpha - x)$ පරාවලය බව පෙන්වන්න.

(ii) PQ සහ PR ලම්බ නම්, P හි පථය ලබාගන්න.