සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
முழுப் பதிப்புரிமையுடையது]
All Rights Reserved]

17863

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව/ இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்/ Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1999 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப்பத்திர(உயர் தர)ப் பரீட்சை, 1999 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1999

ශුද්ධ ගණිතය I
தூய கணிதம் I
Pure Mathematics I

05
S | **I**

පැ තුනයි / மூன்று மணித்தியாலம் / Three hours

ප්‍රශ්න හතකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

---

1. (අ) A, B, C යනු S සර්වත්‍ර කුලකයේ උපකුලක යැයි ගනිමු. ඔබ උපයෝගී කර ගන්නා වූ කුලක විජයේ නියම පදහන් කරමින්, සුපුරුදු අංකනයෙන්,

$$A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$$

බව සාධනය කරන්න.

(ආ) (i) එක් එක් $x \in \mathbb{R}$ සඳහා, $f(x)$ ට බහු අගයයන් ගැනීමට සුළුවන් බව ද

(ii) එක් එක් $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ සඳහා $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |x_1 - x_2|$ බව ද

දී ඇත. එක් එක් $x \in \mathbb{R}$ සඳහා, $f(x)$ ඇත්තෙන් ම ගන්නේ එක් අගයක් පමණක් බව සාධනය කරන්න. f ශ්‍රිතයක් ද?

(ඇ) $g : \mathbb{R} \to (0, 1)$ ශ්‍රිතය,

$$g(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$$

යන්නෙන් අර්ථ දැක්වේ යැයි ගනිමු. g එකට එක සහ මතට බව පෙන්වන්න.

එකට එක සහ මතට වූ $h : (0, c) \to \mathbb{R}$ ශ්‍රිතයක් පවතී ද? මෙහි $c = 10^{-1999}$ වේ. ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

2. (අ) $x\left(y^4 - z^4\right) + y\left(z^4 - x^4\right) + z\left(x^4 - y^4\right)$ හි සාධක සොයන්න.

(ආ) $f(x) = x^2 - 2x + 2$ සහ $g(x) = 6x^2 - 16x + 19$ යැයි ගනිමු.

$f(x) + \lambda g(x)$ ශ්‍රිතය $a(x + b)^2$ ආකාරයට වන සේ වූ λ හි අගයයන් සොයන්න ; මෙහි a සහ b තාත්ත්වික නියත වේ.

ඒ නයින්, A, B, c හි අගයයන් දෙමින් $A(x - 3)^2 + B(x + c)^2$ ආකාරයට $f(x)$ ප්‍රකාශ කරන්න.

$g(x) = 10A(x - 3)^2 + 5B(x + c)^2$ බව ද පෙන්වන්න.

තව ද, $\frac{f(x)}{g(x)}$ හි කුඩාතම සහ වැඩිතම අගයයන් ද සොයන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

3. (අ) $\left|\frac{x+2}{x-3}\right| > 4$ අසමානතාව විසඳන්න.

(ආ) $(1+t)^n$ හි ප්‍රසාරණය ලියන්න; මෙහි n යනු ධන නිඛිලයකි.

(i) ${}^nC_k + 2\,{}^nC_{k-1} + {}^nC_{k-2} = {}^xC_k$ නම්, x සොයන්න.

(ii) ${}^nC_i\,{}^iC_j = {}^nC_j\,{}^{n-j}C_{i-j}$ බව පෙන්වන්න.

$n > 10$ සඳහා, $\sum_{i=10}^{n} (-1)^i\,{}^nC_i\,{}^iC_{10} = 0$

බව අපෝහනය කරන්න.

[මෙහි ${}^nC_r$ යන්න සුපුරුදු අර්ථය ගනී.]

4. සිරස් කුඹගසක ධජ අටක් ප්‍රදර්ශනය කිරීමෙන් "8 - ධජ සංඥවක්" සැදේ. කුඹගස මත ධජ අට පහළ සිට පටිපාටිය මඟින් සංඥවක් නිර්ණය වේ.

(i) සියල්ල මී වෙනස් ධජ අටක් මඟින්

(ii) සියල්ල මී වෙනස් ධජ නවයක් මඟින්

(iii) සර්වසම රතු ධජ හතරක්, සර්වසම නිල් ධජ දෙකක් සහ සර්වසම කොළ ධජ දෙකක් මඟින්

(iv) සර්වසම රතු ධජ හතරක්, සර්වසම නිල් ධජ තුනක් සහ සර්වසම කොළ ධජ දෙකක් මඟින්

එකිනෙකට වෙනස් "8 - ධජ සංඥ" කොපමණ සැදිය හැකි ද?

5. (අ) ගණිත අභ්‍යුහනය පිළිබඳ මූලධර්මය භාවිතයෙන්, ඕනෑම n ධන නිඛිලයක් සඳහා,

$$\sum_{r=1}^{n} r(r+1)^2(r+2) = \frac{1}{10} n(n+1)(n+2)(n+3)(2n+3)$$

බව සාධනය කරන්න.

(ආ) අපරිමිත ශ්‍රේණියක U_r නම් r වැනි පදය

$\frac{2(r+4)}{r(r+1)(r+2)}$ වෙයි.

ඕනෑම r ධන නිඛිලයක් සඳහා, $U_r = A\{f(r) - f(r+1)\}$ වන පරිදි වූ, A නියතයක් සහ f ශ්‍රිතයක් සොයන්න.

ඒ නයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, ඉහත ශ්‍රේණියේ මුල් පද n හි ඓකෘතය සොයන්න.

ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වා, එහි ඓකෘතය සොයන්න.

6. (අ) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}+} \left\{ \dfrac{\sqrt{1+\cos 2x}}{\sqrt{\pi} - \sqrt{2x}} \right\}$

අගයන්න.

$\dfrac{\pi}{2}$ තරා x එළැඹෙන විට ඉහත ශ්‍රිතයේ සීමාව පවතී ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

(ආ) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ශ්‍රිතය,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x^3}{|x^2 - 1|} & , \ x \neq -1, 1 \text{ විට} \\ \\ 1 & , \text{ අනෙක් විට} \end{cases}$$

යන්නෙන් අර්ථ දැක්වේ.

$x = 0$ දී හා $x = 1$ දී f සන්තතික දැයි නිර්ණය කරන්න.

(ඇ) $\{(x, f_1(x)) : |x| \leq 2\} \cup \{(x, f_2(x)) : |x| \leq 2\} = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 4, \ x, y \in \mathbb{R}\}$ වන සේ,

$\{x : x \in \mathbb{R}, |x| \leq 2\}$ ප්‍රාන්තරයෙහි සන්තතික වූ f_1 සහ f_2 ශ්‍රිත දෙකක් ලියන්න.

7. (අ) $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \dfrac{\pi}{2}$ නම්, $x = 1$ විට $\dfrac{dy}{dx}$ සොයන්න.

(ආ) $y = \left[\ln \left(x + \sqrt{1 + x^2} \right) \right]^2$ නම්,

$\left(1 + x^2\right)\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 4y$ බව පෙන්වන්න.

(ඇ) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x > 0 \text{ විට} \\ \\ 2x^2 + 3x, & x \leq 0 \text{ විට} \end{cases}$

යන්නෙන් අර්ථ දක්වෙන, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ශ්‍රිතය $x = 0$ දී අවකලය නොවන බව ද, එනමුත්
$g(x) = xf(x)$ යන්නෙන් අර්ථ දක්වෙන $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ශ්‍රිතය $x = 0$ දී අවකලය බව ද පෙන්වන්න.

8. $f(x) = (x - 1)^2 (x + 1)$ යැයි ගනිමු.

$y = f(x)$ ප්‍රස්තාරය මඟින් ඛණ්ඩාංක අක්ෂ හමුවන ලක්ෂ්‍යවල ඛණ්ඩාංක ද හැරුම් ලක්ෂ්‍යවල ඛණ්ඩාංක ද ගෙනහැර දක්වමින් ඉහත ප්‍රස්තාරයේ දළ රූ සටහනක් අඳින්න.

තව ද, (i) y අක්ෂය හමුවන ලක්ෂ්‍යවල ඛණ්ඩාංක ද
(ii) හැරුම් ලක්ෂ්‍යවල (ඒවා ඇත්නම්) ඛණ්ඩාංක ද
(iii) ස්පර්ශෝන්මුඛ ද

ගෙන හැර දක්වමින්, $y = \dfrac{1}{f(x)}$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ රූ සටහනක් ද අඳින්න.

9. $\int \frac{1}{2 + \sin x}\, dx$ සොයන්න. (**ආදේශය** : $t = \tan \frac{x}{2}$ යොදා බලන්න.)

$\frac{\cos^2 x}{2 + \sin x} \equiv A + B \sin x + \frac{C}{2 + \sin x}$ වන පරිදි A, B, C නියත නිර්ණය කර

ඒ නයින් $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{2 + \sin x}\, dx$ අගයන්න.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \ln(2 + \sin x)\, dx = \ln 2 + \pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - 1$$

බව අපෝහනය කරන්න.

10. (අ) $V = \frac{y}{x}$ ආදේශය භාවිත කිරීමෙන්,

$$x \sin\left(\frac{y}{x}\right) \frac{dy}{dx} = y \sin\left(\frac{y}{x}\right) + x\left\{3 + 2\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right\}$$

අවකල සමීකරණය විසඳන්න.

(ආ) xy-තලයෙහි පිහිටි C වක්‍රයට $P \equiv (x, y)$ ලක්ෂ්‍යයක දී ඇඳි ස්පර්ශකය Q හි දී y අක්ෂය හමුවේ. PQ හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය $y = 1$ රේඛාව මත පිහිටයි. $y = \lambda x^2 + 1$ ත් ගෙන දෙන පරාවලු කුලයට C අයත් වන බව පෙන්වන්න; මෙහි λ යනු පරාමිතියකි.

තව ද, ඉහත වක්‍ර කුලයේ ප්‍රලම්බ පරාවක්‍ර ද සොයන්න.

සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
முழுப் பதிப்புரிமையுடையது]
All Rights Reserved]

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව/ இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்/ Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1999 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப்பத்திர(உயர் தர)ப் பரீட்சை, 1999 ஓகஸ்த
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1999

ශුද්ධ ගණිතය II
தூய கணிதம் II
Pure Mathematics II

05
S | **II**

පැ තුනයි / மூன்று மணித்தியாலம் / Three hours

ප්‍රශ්න **හතකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

---

1. $x=a$, $x+y=b$ සහ $-x+y+z=c$ සමීකරණ $AX=B$ ආකාරයට ලියූ විට ලැබෙන A න්‍යාසය සොයන්න;

මෙහි $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ සහ $B=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ වේ.

x, y, z සඳහා a, b, c ඇසුරෙන් දී ඇති සමීකරණ විසඳීමෙන්, A^{-1} න්‍යාසය ලියන්න.

$C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ නම්, CC^T සොයන්න.

ඒ නයින්, $D=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ විට, $AC^TX=D$ සමීකරණය විසඳන්න.

$D=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ නම්, $AC^TX=D$ සමීකරණයට අනන්‍ය විසඳුමක් තිබේ ද?

ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

2. (අ) $x=0$ යන්න,

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & x-1 \\ x+2 & 1 & 1 \\ 4 & x-4 & 2x-4 \end{vmatrix} = 0$$

සමීකරණයෙහි විසඳුමක් බව සත්‍යාපනය කරන්න.
තව ද, ඉහත සමීකරණයේ ඉතිරි විසඳුම් සියල්ල ද සොයන්න.

(ආ) $f(x)=2\cos^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x+\sin^2 x+3$, $x\in\mathbb{R}$ යැයි ගනිමු.

$f(x) = r\cos(nx-\theta)+s$ ආකාරයට $f(x)$ ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න ; මෙහි n යනු ධන නිඛිලයක් ද, r ධන සංඛ්‍යාවක් ද, θ, s තාත්ත්වික සංඛ්‍යා ද වන අතර $\theta\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ වේ.

f හි උපරිම සහ අවම අගයයන් ද එවා සිදුවන විට අනුරූප x හි අගයයන් ද අපෝහනය කරන්න.

[අහක් පිට බලන්න.

3. ධන නිඛිලමය දර්ශකයක් සඳහා, ද මුවාවර් ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.

$n \in \mathbb{Z}$ සඳහා, $\theta \neq (4n + 3)\frac{\pi}{2}$ විට,

$$\frac{1 + \sin\theta + i\cos\theta}{1 + \sin\theta - i\cos\theta} = \sin\theta + i\cos\theta$$

බව සාධනය කරන්න.

ඒ නයින් හෝ අන්‍යක්‍රමයකින් හෝ,

(i) $\left(1 + \sin\frac{\pi}{5} + i\cos\frac{\pi}{5}\right)^5 + i\left(1 + \sin\frac{\pi}{5} - i\cos\frac{\pi}{5}\right)^5 = 0$

බව පෙන්වන්න.

(ii) $\left(\frac{\sqrt{2} + 1 + i}{\sqrt{2} + 1 - i}\right)^{1/4}$ හි සියලු ම අගයයන් $\cos\theta + i\sin\theta$ ආකාරයට ලබා ගන්න.

[මෙහි, $a^{\frac{1}{4}}$ යන්නෙන් අදහස් කෙරෙනුයේ $z^4 = a$ හි විසඳුමකි.]

4. z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව, ආගන් රූ සටහනෙහි P ලක්ෂ්‍යයෙන් නිරූපණය වේ. O යනු මූල ලක්ෂ්‍යය ද, w යනු දී ඇති සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් ද යැයි ගනිමු. O වටා ϕ කෝණයකින් වාමාවර්ත අතට OP භ්‍රමණය කළ විට P හි නව පිහිටීම P' යැයි ගනිමු ; මෙහි $\phi = \text{Arg}\, w$ වේ. Q යනු, $OQ = |w|\, OP'$ වන පරිදි OP' මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යය නම් Q මඟින් zw සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කෙරෙන බව පෙන්වන්න.

$|z - a| = a$ වක්‍රය, මූල ලක්ෂ්‍යය හරහා යන බව ද එහි කේන්ද්‍රය x අක්ෂය මත පිහිටන බව ද සත්‍යාපනය කරන්න ; මෙහි a යනු ධන නියතයකි.

$|z - a| = a$ විට,

(i) $z \neq 0$ සඳහා, $z - 2a = iz\tan\theta$ බව ද,

(ii) $\text{Re}\left(\frac{1}{z - 2a}\right)$, z හි අගය මත රඳා නොපවතින බව ද

පෙන්වන්න ; මෙහි $\theta = \text{Arg}\, z$ වේ.

5. O මූල ලක්ෂ්‍යය අනුබද්ධයෙන් A, B, C ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $-3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ සහ $-\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$ වේ.

ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය ද ABC තලයට ලම්බ වූ ඒකක දෛශිකයක් ද සොයන්න.

ඒ නයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ O, A, B, C ලක්ෂ්‍ය ඒකතල නොවන බව පෙන්වන්න.

H යනු, O සිට ABC තලයට ඇඳි ලම්බයේ අඩිය යැයි ගනිමු. $\overrightarrow{OH}$ ද $BD : DC$ අනුපාතය ද සොයන්න ; මෙහි D යනු AH සහ BC හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය යි.

6. (අ) $\tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{7}{17}\right) = \frac{\pi}{4}$ බව පෙන්වන්න.

(ආ) $\cos x + \cos 3x = \sin 2x + \sin 4x$ සමීකරණය විසඳන්න.

(ඇ) $\cos 3\theta \equiv \cos\theta\,(2\cos 2\theta - 1)$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\alpha = \frac{2\pi}{41}$ විට,

$(2\cos 11\alpha - 1)(2\cos 17\alpha - 1)(2\cos 31\alpha - 1)(2\cos 33\alpha - 1) = 1$

බව පෙන්වන්න.

7. H යනු, AC ට BH ලම්බ වන පරිදි ද, AB ට CH ලම්බ වන පරිදි ද ABC තලයෙහි වූ ලක්ෂ්‍යය යි. ABC තලයෙහි වූ සෘජු කෝණාස්‍රාකාර කාටීසියානු අක්ෂ කුලකයකට අනුබද්ධ ව, $A \equiv (\alpha, \beta)$ වේ; මෙහි $|\alpha| \neq 1$, $\beta \neq 0$ සහ $\alpha^2 + \beta^2 \neq 1$ වේ. BH සහ CH රේඛාවල සමීකරණ පිළිවෙළින්

$(\alpha - 1)x + \beta y + \alpha - 1 = 0$ සහ $(\alpha + 1)x + \beta y - (\alpha + 1) = 0$ වෙයි.

B සහ C හි ඛණ්ඩාංක නිර්ණය කර AH සහ BC ලම්බ බව සත්‍යාපනය කරන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයේ එක් එක් ශීර්ෂය හරහා, සම්මුඛ පාදයට සමාන්තර රේඛාවක් අඳිනු ලැබේ. මෙම රේඛා තුනෙන් $A'B'C'$ ත්‍රිකෝණය සැදේ. H ලක්ෂ්‍යය, A', B' සහ C' ලක්ෂ්‍යවලින් සමදූරින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

8. $P(\cos\theta, \sin\theta)$ යනු $x^2 + y^2 = 1$ වෘත්තය මත පිහිටි විචල්‍ය ලක්ෂ්‍යයකි. Q යනු P හරහා වූ විෂ්කම්භයේ අනෙක් අන්තය යි. A සහ B යනු පිළිවෙළින් $(1, 0)$ සහ $(0, 1)$ ඛණ්ඩාංක සහිත ලක්ෂ්‍ය වේ. AP සහ BQ රේඛා U හි දී ඡේදනය වේ නම්, U හි ඛණ්ඩාංක,

$$(x - 1)\cos\frac{\theta}{2} + y\sin\frac{\theta}{2} = 0$$

සහ $$(1 + x - y)\cos\frac{\theta}{2} + (x + y - 1)\sin\frac{\theta}{2} = 0$$

සමීකරණ තෘප්ත කරන බව පෙන්වන්න.

U ලක්ෂ්‍යය, S අචල වෘත්තයක් මත පිහිටන බව අපෝහනය කර එහි සමීකරණය ලබාගන්න.

තව ද, AQ සහ BP හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය ද S මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

9. අරය a වූ ද කේන්ද්‍රයේ ධ්‍රැවක ඛණ්ඩාංක (a, α) වූ ද වෘත්තයක ධ්‍රැවක සමීකරණය සොයන්න.

අරයයන් පිළිවෙළින් 3 සහ 4 වූ S_1, S_2 වෘත්ත දෙකක් O සහ O' හි දී ප්‍රලම්බ ව ඡේදනය වේ. S_1 හි කේන්ද්‍රය O ට යා කෙරෙන රේඛාවත් OO' රේඛාවත් අතර සුළු කෝණය සොයන්න.

OO' ආරම්භක රේඛාව ලෙස ද O ධ්‍රැවය ලෙස ද ගෙන S_1 සහ S_2 හි ධ්‍රැවක සමීකරණ ලියන්න.

O හරහා වූ විචල්‍ය රේඛාවක්, පිළිවෙළින් P සහ Q ලක්ෂ්‍යවල දී S_1 සහ S_2 නැවත ඡේදනය කරයි. PQ හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය අචල වෘත්තයක් මත පිහිටන බව පෙන්වා, එහි කේන්ද්‍රයේ ධ්‍රැවක ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

10. PQ යනු, ශීර්ෂය O වූ $y^2 = 4ax$ පරාවලයේ විවල්‍ය ජ්‍යායක් යැයි ගනිමු. $P\hat{O}Q$ කෝණය සෘජු කෝණයක් වන පරිදි වූ සියලු PQ ජ්‍යායයන් ඒකලක්ෂ්‍ය බව සාධනය කරන්න.

ඉහත පරාවලයට එය මත පිහිටි R විවල්‍ය ලක්ෂ්‍යයක දී ඇඳි ස්පර්ශකය, $xy = 1$ බහුවලය S සහ T හි දී ඡේදනය කරනු ලැබේ. ST හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය අචල පරාවලයක් මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.