සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
முழுப் பதிப்புரிமையுடையது]
All Rights Reserved]

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව/ இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்/ Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1999 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப்பத்திர(உயர் தர)ப் பரீட்சை, 1999 ஒகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1999

ව්‍යවහාරික ගණිතය I
பிரயோக கணிதம் I
Applied Mathematics I

06
S | **I**

පැ තුනයි / மூன்று மணித்தியாலம் / Three hours

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

---

1. S_1 නැවතුම්පොළක සිට නිශ්චලතාවයෙන් ගමන් අරඹන දුම්රියක වේගය, ශූන්‍යයේ සිට u උපරිම අගයක් දක්වා, නියත α ඒකාකාරයකින් වැඩි වෙයි. මෙම උපරිම වේගය t_1 කාල ප්‍රාන්තරයක් තුළ පවත්වාගෙන ගියායින් පසුව, රෝධක යෙදීමෙන් විවලන මන්දනයක් දුම්රියට ලැබේ. මෙම මන්දනය ශූන්‍යයේ සිට β දක්වා ඒකාකාරී ලෙස t_2 කාලයක් තුළ වැඩි වන අතර දුම්රිය ඊළඟ S_2 නැවතුම්පොළෙහි දී නිශ්චලතාවයට පැමිණේ. එසිනෙකට d දුරකින් පිහිටි S_1 සහ S_2 නැවතුම්පොළ අතර ගමන සම්පූර්ණ කිරීමට දුම්රිය ගත්තා මුළු කාලය T වෙයි.

ත්වරණ-කාල වක්‍රයේ සහ ප්‍රවේග-කාල වක්‍රයේ දළ රූප සටහන්, දෙකම කොටස් නම් කරමින් අඳින්න. ඒ නයින් පහත දක්වෙන ප්‍රතිඵල පිහිටුවන්න:

(i) $u = \frac{\beta}{2} t_2$;

(ii) මන්දනය ආරම්භයේ සිට මැන්න t කාලයේ දී දුම්රියේ වේගය, $v = u - \frac{\beta t^2}{2t_2}$ වේ. මෙහි $0 \le t \le t_2$;

(iii) $d = u\left[\frac{2}{3} + \frac{\beta}{4\alpha}\right] t_2 + ut_1$;

(iv) $T = \frac{d}{u} + 2u\left(\frac{1}{3\beta} + \frac{1}{4\alpha}\right)$.

2. (අ) Oxy-තලයෙහි චලනය වන අංශුවක $\mathbf{r}$ පිහිටුම් දෛශිකය, t කාලයේ දී

$\mathbf{r} = (8 + 20t)\mathbf{i} + (90 + 10t - 5t^2)\mathbf{j}$ මගින් දෙනු ලැබේ. මෙහි $\mathbf{i}$ සහ $\mathbf{j}$ යනු පිළිවෙළින් $\overrightarrow{Ox}$ සහ $\overrightarrow{Oy}$ අක්ෂ දිගේ ඒකක දෛශික වේ. $t = T$ වන විට අංශුව, එහි ආරම්භක වලිත දිශාවට සමුස්කෝණිව චලනය වේ. T හි අගය සහ මෙම මොහොතේ දී අංශුවෙහි පිහිටීමට ආරම්භක පිහිටීමේ සිට දුර සොයන්න.

t කාලයේ දී, අංශුවේ ත්වරණයක් සොයන්න.

(ආ) මෝටර් සයිකලයක් සහිත සමතලා පාරක එක් දරයකට සමාන්තරව V නියත ප්‍රවේගයකින් චලනය වන අතර එම දරයේ සිට නියත a දුරක් පවත්වා ගනී. එම දරයේ සිටී ළමයෙක්, මෝටර් සයිකලයට b දුරක් ඉදිරියෙන් පාරට පියවර තබා, පාරට θ කෝණයකින් වූ U නියත ප්‍රවේගයකින් පාරෙන් අනිත් පැත්තට ඇවිදගෙන යයි; මෙහි $U < V$ වේ. මෝටර් සයිකලයට සාපේක්ෂව ළමයාගේ පෙන සොයා

$$U > \frac{Va}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

වෙයි නම්, මෝටර් සයිකලයට ඉදිරියෙන් අනතුරක් නැතිව ළමයාට පාරෙන් මාරුවී යා හැකි බව පෙන්වන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

3. O මූලයේ සිට $\mathbf{u}$ ආරම්භක ප්‍රවේගයෙන් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබූ අංශුවක් ගුරුත්වය යටතේ, නිදහසේ චලනය වෙයි. t කාලයකට පසු අංශුවේ ප්‍රවේගය $\mathbf{v}$ ද පිහිටුම් දෛශිකය $\mathbf{r}$ ද නම් සහ (සිරස් ව පහළට වූ) ගුරුත්වජ ත්වරණය $\mathbf{g}$ ද නම්

$$\mathbf{r} = \mathbf{u}t + \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2 \quad = \mathbf{v}t - \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2$$

බව පෙන්වා, මෙම සම්කරණ දෛශික රූප සටහනක නිරූපණය කරන්න.

O ලක්ෂ්‍යය, උඩු සිරසට 2β සුළු කෝණයකින් ආනත වූ දෘඩ තලයක් මත පිහිටන බව සහ $\mathbf{u}$ ප්‍රවේග දෛශිකය මගින් තලය සහ සිරස අතර කෝණය සමච්ඡේදනය කෙරෙන බවත් එහි විශාලත්වය $w\cos\beta$ බවත් දී ඇත්නම්, අඳින ලද දෛශික රූප සටහන යොදා ගනිමින්, හෝ අන් අයුරකින් හෝ, පහත දක්වෙන ප්‍රතිඵල පිහිටුවන්න :

(i) අංශුවේ පියාසර කාලය $\frac{w}{g}$ වෙයි.

(ii) තලය මත පරාසය $\frac{w^2}{2g}$ වෙයි.

(iii) අංශුව තලය සමඟ ගැටීමට මොහොතකට පෙර එහි ප්‍රවේගය, ආරම්භක වේග දිශාවට ලම්බ වන අතර $w\sin\beta$ විශාලත්වයෙන් යුතු වෙයි.

4. රේඛීය ගම්‍යතා සංස්ථිති මූලධර්මය සහ යාන්ත්‍රික ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය ප්‍රකාශ කරන්න.

ස්කන්ධය m වූ අංශුවක්, ස්කන්ධය M සහ ආනතිය α වූ සුමට කුප්පයක ආනත තලය දිගේ පහළට සර්පණය වන අතර කුප්පයට සුමට සිරස් මේසයක් මත චලනය වීමට නිදහස ඇත; ආරම්භයේ දී පද්ධතිය නිශ්චලතාවයේ පවතී. කුප්පයට සාපේක්ෂව අංශුවේ v වේගය,

$$v^2 = \frac{2(M+m)gx\sin\alpha}{M + m\sin^2\alpha}$$

මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වීමට ඉහත සංස්ථිති නියම යොදන්න; මෙහි x යනු කුප්පයට සාපේක්ෂව අංශුව චලනය වී ඇති දුර යි.

ඒ නයින්, හෝ අන්ත්‍රමයකින් හෝ, කුප්පයට සාපේක්ෂව අංශුවේ ත්වරණය සොයා, ආරම්භක නිශ්චල පිහිටීමේ සිට කුප්පය ගමන් කර ඇති දුර

$$\frac{mx\cos\alpha}{M+m}$$ බව පෙන්වන්න.

5. මූල ස්කන්ධය M වූ දුම්රියක්, එන්ජිමක් මගින් R ප්‍රතිරෝධයක ට එරෙහි ව සෑදූ සමතල දුම්රිය මාර්ගයක් දිගේ ඇදගෙන යනු ලබයි. එන්ජිම සාධාරණ කරන ශ්‍රිතාව H නියතයක් වෙයි.

(i) R නියතයක් වූ විට, නිශ්චලතාවයෙන් පටන් ගෙන U වේගයකට ළඟා වීමට දුම්රිය ගත්තා කාලය

$$\frac{MH}{R^2}\ln\left(\frac{H}{H - RU}\right) - \frac{MU}{R}$$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $U < \frac{H}{R}$ වෙයි.

(ii) $R = Mkv$ (මෙහි k යනු නියතයක් ද v යනු දුම්රියේ වේගය ද වේ) වූ විට නිශ්චලතාවයෙන් පටන් ගෙන V වේගයකට ළඟාවීමට දුම්රිය ගත්තා කාලය

$$\frac{1}{2k}\ln\left(\frac{H}{H - MkV^2}\right)$$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $V < \sqrt{\frac{H}{Mk}}$ වෙයි.

$v = V$ වන විට එන්ජිමේ ජවය කපා හැරියේ නම්, (මෙම පිහිටීමේ සිට මැන්න විට) අවසාන නිශ්චලතා පිහිටීමට පැමිණීමට පෙර දුම්රිය ගමන් කරන දුර සොයන්න.

6. ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක්, ස්වභාවික දිග l සහ මාපාංකය $2mg$ වූ සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක කෙළවරකට සම්බන්ධ කර ඇත. තන්තුවේ අනික් කෙළවර O අචල ලක්ෂ්‍යයකට සම්බන්ධ කර ඇත. තන්තුව සිරස් ව තිබිය දී අංශුව, එහි සමතුලිත පිහිටීමෙන් d දුරක් පහළට ඇද, නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ.

P අංශුවේ සමතුලිත පිහිටීමේ සිට පහළට සිරස් විස්ථාපනය, t කාලයේ දී x වෙයි නම්,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2g}{l}x = 0$$

බව පෙන්වන්න.

(i) $d < \frac{l}{2}$ වෙයි නම්, අංශුව එහි සමතුලිත පිහිටීම වටා $\pi\sqrt{\frac{2l}{g}}$ කාලාවර්තය සහිත ව සරල අනුවර්ති චලිතයේ යෙදෙන බවත්, තන්තුව නොබුරුල්ව තිබෙන බවත් පෙන්වන්න.

(ii) $d > \frac{l}{2}$ වෙයි නම්

$$\sqrt{\frac{l}{2g}}\left[\pi - \sin^{-1}\left(\frac{l}{2d}\right)\right]$$

කාලයකට පසු තන්තුව බුරුල් වන බව පෙන්වන්න.

7. AB ඉණිමගක්, එහි එක් A කෙළවරක් රළු සිරස් ගෙබිමක සහ B අනෙක් කෙළවර රළු සිරස් බිත්තියක ස්පර්ශ වී නිශ්චලතාවයේ ඇත. AB ඉණිමග අඩංගු සිරස් තලය බිත්තියට ලම්බ වෙයි. A සහ B එක් එක් ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේ දී ඝර්ෂණ සංගුණකය μ වන අතර ඉණිමගෙහි G ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය මගින් $AG : GB = k : 1$ අනුපාතයට AB බෙදෙයි. ඉණිමග සීමාකාරී සමතුලිතතාවේ තිබෙන විට එය සිරසට සාදන θ ආනතිය

$$\tan\theta = \frac{k - \mu^2}{\mu(k+1)}$$

මගින් දෙන බව පෙන්වන්න.

ඉණිමග ඒකාකාරී වන විට, $\theta = \frac{\pi}{2} - 2\lambda$ බව අපෝහනය කරන්න; මෙහි λ යනු ඝර්ෂණ කෝණය වන අතර 2λ සුළු කෝණයක් බව දී ඇත.

ඉණිමගෙහි සිරසට ආනතිය $\alpha\left(< \frac{\pi}{2} - 2\lambda\right)$ වෙයි නම්, ඉණිමග පහළට ලිස්සා යෑම යම්තම් වැලකෙන පරිදි එය අඩංගු සිරස් තලයෙහි යෙදිය යුතු යුග්මයේ G ඝූර්ණය,
$G = Wa\cos(\alpha + 2\lambda)$ බව පෙන්වන්න, මෙහි W යනු ඉණිමගේ බර ද $2a$ යනු ඉණිමගේ දිග ද වෙයි.

8. ඒකාකාර අර්ධවෘත්තාකාර ආස්තරයක අරය a සහ කේන්ද්‍රය O වේ. එහි සමමිතික දරය AOB වන අතර සමමිතික අක්ෂය OC වෙයි. පිළිවෙළින් OB සහ OC දිගේ Ox සහ Oy සාපේක්ෂාත්‍ර කාටීසීය අක්ෂ ගනු ලැබේ. මෙම අක්ෂ පද්ධතිය අනුබද්ධයෙන් ආස්තරයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයෙහි බණ්ඩාංක $\left(0, \frac{4a}{3\pi}\right)$ බව, අනුකලනය මගින්, පෙන්වන්න.

ආස්තරය මත අරය $r\,(< a)$ වූ අර්ධ වෘත්තයක් අඳිනු ලැබේ; එම අර්ධ වෘත්තයේ P කේන්ද්‍රය පිහිටන්නේ AO මත A සිට r දුරකින් ය. මෙම අර්ධ වෘත්තයෙන් ඇතුළත වර්ගඵලය සහිත කොටස කපා ඉවත් කරනු ලැබේ. ඉහත Oxy-අක්ෂ පද්ධතිය අනුබද්ධයෙන් ම, ආස්තරයෙන් ඉතිරි වන R කොටසේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයෙහි $(\bar{x}, \bar{y})$ බණ්ඩාංක දෙනු ලබන්නේ

$$\bar{x} = \frac{r^2}{a+r}, \qquad \bar{y} = \frac{4\left(a^2 + ar + r^2\right)}{3\pi(a+r)}$$

මගින් බව පෙන්වන්න.

මෙම R කොටස A ලක්ෂ්‍යයෙන් නිදහසේ එල්ලා ඇත්නම්, සමතුලිත පිහිටීමේ දී, AOB දරයෙහි සිරසට ආනතිය r කෙරෙන් ස්වායත්ත වන බව පෙන්වා, මෙම නියත ආනතිය සොයන්න.

[අතක් පිට බලන්න.

9. $ABCD$ යනු AB, BC, CD සහ DA සැහැල්ලු දඬු හතරක් නිදහස් ලෙස සන්ධි කිරීමෙන් සෑදූ රොම්බසයක ආකාරයේ රාමු සැකිල්ලකි. රොම්බසයේ B සහ D ශීර්ෂ තවත් සැහැල්ලු දණ්ඩකින් සම්බන්ධ කර ඇත්තේ $B\hat{A}D$ කෝණය $2\alpha\left(<\frac{\pi}{2}\right)$ වන පරිදි ය. රාමු සැකිල්ල, සිරස් තලයක නිශ්චලතාවයේ ඇත්තේ, B සුමට ආධාරකයක් මත තබා, AB තිරස් ව CD මට්ටමට පහළින් තිබෙන පරිදි A හි දී සිරස් බලයකින් නැංගුරම් කර (anchored) සහ C හි දී W භාරයක් දරමිනි.

A හි දී යොදන බලය සහ B හි දී ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.

"කෝ අංකනය" භාවිතයෙන් රාමුසැකිල්ල සඳහා ප්‍රත්‍යාබල රූප සටහනක් අඳින්න. ඒ නයින්, දඬු පහේ ම ප්‍රත්‍යා බල, ආතති සහ තෙරපුම් වෙන් කර දක්වමින්, W සහ α ඇසුරෙන් සොයන්න.

10. $P(A_i \mid D)$ අසම්භාව්‍ය සම්භාවිතාව දෙන්නා වූ බේස් ප්‍රමේයයේ සරල ආකාරය ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $i = 1, 2, 3$ සඳහා A_i යනු එක්තරා පරීක්ෂණයක S නියැදි අවකාශය මේලය වශයෙන් ඇති අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර සිද්ධි තුනක් වන්නේ D යනු $P(D) > 0$ වන සේ ඇති S හි අභිමත සිද්ධියක් වන්නේ දී ඇත. [සූත්‍රය සාධනය අපේක්ෂා නොකෙරේ].

කර්මාන්තශාලාවක් මගින් A_1, A_2, A_3 යන්ත්‍ර තුනක් යොදා ගනිමින් සමාන භාණ්ඩ නිෂ්පාදනය කරනු ලැබේ. එම යන්ත්‍ර තුනෙන් දිනකට නිපදවන ඒකක ගණන පිළිවෙළින් 200, 175 සහ 125 වේ. දීර්ඝ කාලයක් තුළ සොයා ගෙන ඇති පරිදි නිෂ්පාදනයෙහි දෝෂ සහිත ප්‍රතිශතය A_1, A_2 සහ A_3 යන්ත්‍ර සඳහා පිළිවෙළින් 4%, 4%, සහ 6% වේ.

(අ) කර්මාන්තශාලාවේ නිෂ්පාදනයෙන් ඒකකයක් සසම්භාවී ව තෝරා ගත් විට එය සදෝස් එකක් වීමේ සම්භාවිතාව 0·045 බව පෙන්වන්න.

(ආ) කර්මාන්තශාලාවේ නිෂ්පාදනයෙන් සසම්භාවීව තෝරාගත් ඒකකයක් සදෝස් එකක් බව සොයා ගත්තේ නම්, එය A_1 යන්ත්‍රයෙන් නිපදවා තිබීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න. එය නිපදවීමට වඩාත් ම ඉඩ ඇත්තේ කුමන යන්ත්‍රයෙන් ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

(ඇ) වෙනස් දින තුනක දී එක් එක් දවසේ කර්මාන්ත ශාලාවේ නිෂ්පාදනයෙන් ඒකකයක් බැගින් සසම්භාවී ව තෝරා ගනු ලැබේ. එවායින් හරියටම එකක් සදෝස් වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(ඈ) එක්තරා දිනක දී, එක් එක් යන්ත්‍රයේ නිෂ්පාදනයෙන් එක ඒකකයක් බැගින් සසම්භාවී ව තෝරා ගනු ලැබේ නම් එවායින් හරියටම එකක් සදෝස් වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
முழுப் பதிப்புரிமையுடையது]
All Rights Reserved]

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව/ இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்/ Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1999 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப்பத்திர(உயர் தர)ப் பரீட்சை, 1999 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1999

ව්‍යවහාරික ගණිතය II
பிரயோக கணிதம் II
Applied Mathematics II

06
S | **II**

පැ තුනයි / மூன்று மணித்தியாலம் / Three hours

ප්‍රශ්න **හයකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.
සංඛ්‍යාන වගු සපයනු ලැබේ.

---

1. තලයක චලනය වන P අංශුවක්, O මූලයක් සහ Ox ආරම්භක රේඛාව අනුබද්ධයෙන්, ධ්‍රැවක ඛණ්ඩාංක (r, θ) වෙයි. P හි ප්‍රවේග සහ ත්වරණ දෙඝකවල අරීය සහ තිර්යක් සංරචක **ප්‍රකාශ කරන්න**.

දිග $2a$ වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක්, සුමට තිරස් මේසයක් මත O ලක්ෂ්‍යයක සවිකර ඇති කුඩා සුමට මුදුවක් තුළින් යයි. තන්තුවේ දෙකෙළවරට, ස්කන්ධ පිළිවෙළින් m සහ $2m$ වූ P සහ Q ඉතා කුඩා ගෝල දෙකක් සම්බන්ධ කර ඇත. PQ තන්තුව නොබුරුල්ව, සරල රේඛාවක් දිගේ, PQ හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය O හි පිහිටන පරිදි ගෝල දෙක මේසය මත තබා ඇත. ආරම්භයේ දී P ගෝලයට, මේසය දිගේ, තන්තුවට ලම්බ V ප්‍රවේගයක් දෙනු ලැබේ. t කාලයේ දී OP හි දිග r ද, OP හැරී ඇති කෝණය θ ද වෙයි.

P අංශුවට, තිර්යක් දිශාවට වලිත නියමය යෙදීමෙන් $\frac{d\theta}{dt} = \frac{aV}{r^2}$ බව පෙන්වන්න.

පද්ධතිය සඳහා ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය ලියා දක්වා $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{V^2}{3}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)$ සමීකරණය ලබා ගන්න.

ඒ නයින්, Q ගෝලය $\frac{3a}{V}$ කාලයකට පසුව O තරා ළඟාවන බව පෙන්වා, මෙම මොහොතේ P හි ප්‍රවේගයේ සංරචක සොයන්න.

Q ගෝලය, O මුදුවේ රැඳෙයි නම් සහ තන්තුව නොකැඩෙයි නම්, එම මොහොතේ තන්තුවේ ආවේගී ආතතිය $\frac{mV}{2}$ බවත්, පසුව පිදුවන P ගෝලයේ වලිතයේ දී තන්තුවේ ආතතිය $\frac{mV^2}{8a}$ බවත් පෙන්වන්න.

2. කේන්ද්‍රය O සහ අරය a වූ අවල සුමට කුහර ගෝලයක **ඇතුළත** පහත් ම ලක්ෂ්‍යයේ ඇති P අංශුවක්, $2ga < u^2 < 5ga$ වන පරිදි වූ u වේගයෙන් තිරස් ව ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ; OP රේඛාව θ කෝණයකින් හැරී ඇතිවිට අංශුව තවම ගෝලයේ පෘෂ්ඨය සමඟ ස්පර්ශ වී ඇත්නම් එහි වේගය සොයන්න. තිරස සමඟ $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{u^2 - 2ga}{3ga}\right)$ සූළු කෝණයක් සාදන දිශාවකට උඩු අතට වලනය වෙමින් තිබිය දී, $v = \sqrt{\frac{u^2 - 2ga}{3}}$ වේගයෙන් අංශුව ගෝලයේ පෘෂ්ඨයෙන් ඉවතට යන බව පෙන්වන්න.

ඉන් පසුව, ගුරුත්වය යටතේ කෙරෙන නිදහස් වලිතයේ දී අංශුව, ගෝලයේ O කේන්ද්‍රය හරහා යයි නම් $\tan^2\alpha = 2$ බවත්, $u^2 = \left(2 + \sqrt{3}\right)ga$ බවත් පෙන්වන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

3. අංශුවක ප්‍රවේගය $\mathbf{u}$ සිට $\mathbf{v}$ දක්වා වෙනස් කරන $\mathbf{I}$ ආවේගයක් නිසා අංශුවේ ඇතිවන වාලක ශක්ති වෙනස $\mathbf{I} \cdot \left(\frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{2}\right)$ බව සාධනය කරන්න.

A සුමට ගෝලයක් තිරස් අප්‍රත්‍යාස්ථ සුමට ගෙඹිමක තිශ්චල ව, එහෙත් චලනය වීමට නිදහස ඇතිව, තබා ඇත. A ට සර්වසම වූ B ගෝලයක් තිරස් ව පහළට u වේගයෙන් වැටෙන අතර A ගෝලය සමඟ ගැටෙන්නේ, ගැටුම් මොහොතේ දී ගෝලවල කේන්ද්‍ර රේඛාව තිරස සමඟ α කෝණයක් සාදන පරිදි ය. ගෝල දෙක අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය e වෙයි. සංකථනය සම්බන්ධයෙන්, පහත දක්වෙන ප්‍රතිඵල පිහිටුවන්න:

(i) ගෝල දෙක අතර ආවේගය $\frac{(1 + e)\, mu \cos\alpha}{1 + \sin^2\alpha}$ වෙයි.

(ii) සිදුවන වාලක ශක්ති හානිය $\left(1 - e^2\right) \frac{mu^2}{2} \left(\frac{\cos^2\alpha}{1 + \sin^2\alpha}\right)$ වෙයි.

(iii) ගෙඹිමෙන් ඇති කරන ආවේගය $(1 + e)\, mu \left(\frac{\cos^2\alpha}{1 + \sin^2\alpha}\right)$ වෙයි.

ගෙඹිමෙන් ආවේගය නිසා වාලක ශක්ති හානියක් සිදු නොවන්නේ ඇයි?

4. ස්කන්ධය M සහ අරය a වූ ඒකාකාර වෘත්තාකාර තැටියකට, එහි කේන්ද්‍රය හරහා යන, එහි තලයට අඟිලම්බ අචල තිරස් අක්ෂයක් වටා භ්‍රමණය වීමට නිදහස ඇත. ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් තැටියේ දරය මත එහි උච්චතම ලක්ෂ්‍යයේ තබනු ලැබේ. අංශුව සහ තැටිය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය μ වේ. පද්ධතිය තිශ්චලතාවයේ සිට යම්තම් විස්ථාපනය කෙරෙන අතර, t කාලයේ දී තැටිය හැරෙන කෝණය θ වේ. අංශුව සහ තැටිය අතර සාපේක්ෂ චලිතයක් නොමැතිනාක් කල්

$$(M + 2m)\, a \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 4\, mg\, (1 - \cos\theta)$$ බව පෙන්වා

$\frac{d^2\theta}{dt^2}$ සඳහා ප්‍රකාශනයක් ලබා ගන්න.

තැටියෙන් අංශුව මත ක්‍රියා කරන බලයෙහි ස්පර්ශක සංරචකය, $F = \frac{M mg \sin\theta}{M + 2m}$ බව පෙන්වා එම බලයේ අරීය සංරචකය සොයන්න. අංශුව තැටිය සමඟ ස්පර්ශය නැතිවීමට පෙර අංශුව ලිස්සන බව අපේක්ෂනය කර, ලිස්සීම සිදුවන විට θ හි අගය සඳහා සමීකරණයක් ලබා ගන්න.

5. ස්කන්ධය m සහ දිග $2a$ වූ ඒකාකාර AB දණ්ඩක A කෙළවර හරහා යන AB ට ලම්බ අක්ෂයක් වටා අවස්ථිති ඝූර්ණය $\frac{4\, ma^2}{3}$ බව පෙන්වන්න.

දණ්ඩේ A කෙළවර අචල ලක්ෂ්‍යයකට විවර්තනය කර, AB තිරස් ව තිබිය දී තිශ්චලතාවයේ සිට දණ්ඩ මුදා හරිනු ලැබේ. එය θ කෝණයකින් හැරී ඇති විට $a\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{3g}{2} \sin\theta$ බව පෙන්වන්න.

එම මොහොතේ දී, A හි දී ප්‍රතික්‍රියාවේ දණ්ඩ දිගේ සංරචකය සොයන්න.

AB තිරස් වන මොහොතේ දී A කෙළවර විවර්තනියෙන් මුදා හරිනු ලැබේ. ගුරුත්වය යටතේ, දණ්ඩෙහි පසුව සිදුවන චලිතයේ දී එහි G ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයේ පථය සොයන්න.

දණ්ඩෙහි ප්‍රථම තිරස් පිහිටීම ඇති මොහොතේ සිට $\pi\sqrt{\frac{2a}{3g}}$ කාලයකට පසු AB නැවත ක්ෂණික ව තිරස් පිහිටීමකට පැමිණෙන බව ද, මෙම කාලයේ දී G චලනය වන තිරස් දුර πa බව ද පෙන්වන්න.

6. (අ) මල්ලක් තුළ, වර්ණයෙන් හැර අනික් හැම ලෙසින් ම සර්වසම වූ බෝල 5 ක් අඩංගු වේ. ඒවායින් දෙකක් සුදු පාට ද, තුනක් කළුපාට ද වේ. සුදු බෝල දෙකම ලැබෙන තුරු වරකට එක බැගින්, ආපසුහාරිව, ප්‍රතිස්ථාපන රහිත ව, මල්ලෙන් බෝල ඉවතට ගනු ලැබේ.

X සසම්භාවී විචල්‍යය, "සුදු බෝල දෙකම ලැබීම සඳහා ඉවතට ගැනීමට අවශ්‍ය වාර ගණන" නම්, X හි සම්භාවිතා ව්‍යාප්තිය සොයන්න. X හි මධ්‍යන්‍ය අගය 4 බව පෙන්වා X හි සම්මත අපගමනය සොයන්න.

(ආ) දුනුවායෙක්, ඉලක්ක ලැල්ලක හරි මැද වෙත ඊයක් විදීමට පුරුදු වෙයි. එක් එක් උත්සාහය සඳහා ස්වායත්ත ව, හරි මැදට විදීමට (සාර්ථකත්වයට) ඔහුගේ සම්භාවිතාව $\frac{1}{5}$ වෙයි. ඔහුගේ ප්‍රථම සාර්ථකත්වය ලැබෙන්නේ

(i) ඔහුගේ දෙවැනි උත්සාහයේ දී,

(ii) ඔහුගේ තෙවැනි උත්සාහයේ දී,

(iii) ඔහුගේ පස්වැනි උත්සාහයේ දී

වීමේ සම්භාවිතාව, දශමස්ථාන තුනකට, සොයන්න.

"දුනුවායාගේ ප්‍රථම සාර්ථක උත්සාහයක් ඇතුළුව ඊ දක්වා ඔහු කරන උත්සාහ ගණන", Y යැයි ගනිමු. Y විචල්‍යය, සම්භාවිතා ශ්‍රිතය

$$P(Y = r) = \left(\frac{4}{5}\right)^{r-1}\left(\frac{1}{5}\right), \quad r = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

පණිත සසම්භාවී විචල්‍යයක් බව සත්‍යාපනය කරන්න.

$(1 - q)^{-2}$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණය උපකල්පනය කරමින්, Y හි මධ්‍යන්‍ය අගය 5 බව පෙන්වන්න. දුනුවායාගේ ප්‍රථම සාර්ථකත්වයට කලින් අසාර්ථක උත්සාහ අඩු වශයෙන් හතරක් වත් සිදීමේ සම්භාවිතාව, ආසන්න වශයෙන් 0·41 බවත් පෙන්වන්න.

7. E නම් කාර්යාලීය දුරකථන නුවමාරුවකට මිනිත්තුවක දී ලැබෙන ඇමතුම් ගණන, X, මධ්‍යන්‍යය μ වූ පොයිසොන් ව්‍යාප්තියක් අනුගමනය කරන අතර X හි සම්භාවිතා ශ්‍රිතය

$$P(X = r) = \frac{e^{-\mu}\mu^r}{r!}, \quad r = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

වෙයි.

පැය 10 කින් යුක්ත සෑම වැඩ කරන දිනක දී ම E වෙත සාමාන්‍යයෙන් ඇමතුම් 240 ක් ලැබෙන බව දී ඇත්නම් μ හි අගය සොයා මෙම මධ්‍යන්‍යය සඳහා පහත දක්වෙන ප්‍රතිඵල පිහිටුවන්න :

(i) මිනිත්තු කුනක කාල ප්‍රාන්තරයක දී බොහෝදුරට ලැබිය හැකි ඇමතුම් සංඛ්‍යාව 1 ක් වේ.

(ii) මිනිත්තු t කාල ප්‍රාන්තරයක දී අඩුම වශයෙන්, එක් ඇමතුමක් වත් ලැබීමේ සම්භාවිතාව $1 - e^{\frac{-2t}{5}}$ වේ.

Y සන්තතික සසම්භාවී විචල්‍යයක්,

"E නුවමාරුව වෙත ලැබෙන අනුගාමී දුරකථන ඇමතුම් දෙකක් අතර කාල ප්‍රාන්තරය" වශයෙන් අර්ථ දක්වෙයි.

Y හි සමුච්චිත ව්‍යාප්ති ශ්‍රිතය ලියා දක්වන්න.

Y හි සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතය $\frac{2}{5}e^{\frac{-2t}{5}}$ බව පෙන්වන්න.

අනුගාමී ඇමතුම් දෙකක් අතර මධ්‍යන්‍ය කාලය ගණනය කරන්න.

E නුවමාරුවේ ක්‍රියාකරුට ගෙවුනු මිනිත්තු තුනේ දී ඇමතුම් කිසිවක් නොලැබුන බව දී ඇත්නම්, ඇමතුමක් අත් නොහැරෙන පරිදි ඊළඟ මිනිත්තු පහ සඳහා ඔහුට නුවමාරුවෙන් බැහැරව සිටිය හැකි වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

[අගක් පිට බලන්න.

8. (අ) "ශුද්ධ බර 250 g" ලෙස ලේබල් කර ඇති ඇසුරුම් තුළට යන්ත්‍රයකින් තේ පුරවනු ලැබේ. ඇසුරුම් 5000 ක ඇණවුමක අඩංගු තේ වල මුළු බර 1275 kg වෙයි. තේ ඇසුරුම් වල ශුද්ධ බර, සම්මත අපගමනය 2 g සහිත ව, ප්‍රමාණ ලෙස ව්‍යාප්ත වී ඇත්නම් මෙම ඇණවුමෙහි

(i) 250 g ට අඩු බර සහිත ව අපේක්ෂිත ඇසුරුම් සංඛ්‍යාව

(ii) හරියටම 250 g බර සහිත ව අපේක්ෂිත ඇසුරුම් සංඛ්‍යාව

සොයන්න.

(ආ) බහුවරණ පරීක්ෂණ පත්‍රයක ප්‍රශ්න 50 ක් අඩංගු ය. අපේක්ෂකයෙකු එක් එක් ප්‍රශ්නයට දී ඇති, කිසිය හැකි, පිළිතුරු කුනකින් එකක් යටින් ඉරක් ඇඳ නිවැරදි බව දක්වීම අවශ්‍ය ය. එක් එක් ප්‍රශ්නයට එක පිළිතුරක් පමණක් නිවැරදි වන අතර එවැනි පිළිතුරක් සඳහා අපේක්ෂකයෙකුට එක ලකුණක් ලැබේ. මූලුමනින් ම නුගත් අපේක්ෂකයෙක් සසම්භාවී ලෙස පිළිතුරු යටින් ඉරි අඳියි. X සසම්භාවී විචල්‍යය, "ඔහු විසින් නිවැරදි ව යටින් ඉරි ඇඳි පිළිතුරු ගණන" ලෙස ගනිමු. X අනුගමනය කරන ද්විපද ව්‍යාප්තියෙහි මධ්‍යන්‍යය සහ විචලතාව සොයන්න.

සමත් වීමේ ලකුණ 20 වෙයි නම්, මෙම ද්විපද ව්‍යාප්තිය සඳහා ප්‍රමාණ සන්නිකර්ෂණයක් යෙදීමෙන්, ඔහු මෙම පරීක්ෂණය සමත්වීමේ සම්භාවිතාව, ආසන්න වශයෙන් 0·1977 බව පෙන්වන්න.

9. නියත m ස්කන්ධයෙන් යුත් P අංශුවක් O ලක්ෂ්‍යයක සිට, සිරස් ව **පහළට**, U වේගයෙන් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. එය ගුරුත්වය යටතේ චලනය වන්නේ අංශුවේ වේගය v වනවිට mkv ප්‍රතිරෝධයක් ඇති කරන මාධ්‍යයක් තුළ ය. මෙහි k නියතයකි. P අංශුවේ වේගය U කෙරෙන් ස්වායත්ත සීමාවකට ළඟාවන බව පෙන්වන්න.

t කාලයක දී P අංශුව වැටෙන දුර

$$\frac{gt}{k} + \frac{1}{k}\left(U - \frac{g}{k}\right)\left(1 - e^{-kt}\right)$$

බවත් පෙන්වන්න.

P හි ප්‍රක්ෂේප මොහොතේ සිට T කාලයකට පසුව P ට සර්වසම Q අංශුවක් O ලක්ෂ්‍යයේම සිට, සිරස් ව **පහළට**, V වේගයෙන් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. අවසානයේ දී ($t \to \infty$ එළඹෙන විට) අංශු දෙක අතර දුර $\frac{1}{k}(U - V + gT)$ බව පෙන්වන්න.

අවසානයේ දී Q ට සාපේක්ෂ ව P හි ප්‍රවේගය කුමක් ද?

10. $\mathbf{F}$ බලයක ක්‍රියා රේඛාව A ලක්ෂ්‍යයක් හරහා යන අතර, O මූලයක් අනුබද්ධයෙන් A හි පිහිටුම් දෛශිකය $\boldsymbol{a}$ වෙයි. O ලක්ෂ්‍යය වටා $\mathbf{F}$ බලයෙහි දෛශික සූර්ණය අර්ථ දක්වා, එහි විශාලත්වය සහ දිශාව පැහැදිලිව ප්‍රකාශ කරන්න.

බල පද්ධතියක් සමන්විත වන්නේ, O මූලය හරහා ක්‍රියා කරන $\mathbf{F}_1 = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{F}_2 = 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ සහ $\mathbf{F}_3 = -4\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ බල **සමඟින්** තවත් බල දෙකකිනි. එවා නම්, පිහිටුම් දෛශිකය $\boldsymbol{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ වූ A ලක්ෂ්‍යය හරහා ක්‍රියා කරන, λ නියතයක් වූ, $\mathbf{F}_4 = \lambda\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ බලයක් සහ පිහිටුම් දෛශිකය $\mathbf{b} = -8\mathbf{i} - 4\mathbf{k}$ වූ B ලක්ෂ්‍යය හරහා ක්‍රියා කරන $\mathbf{F}_5 = -7\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ බලයක් වේ. මෙහි $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ මඟින් පිළිවෙළින් Ox, Oy, Oz සෘජුකෝණාස්‍ර කාටිසිය අක්ෂ දිගේ ඒකක දෛශික දක්වයි.

මෙම පද්ධතිය O හි දී ක්‍රියා කරන $\mathbf{R}$ බලයක් සමඟින් සූර්ණය $\mathbf{G}$ වූ යුග්මයකට ඌනනය කළේ නම් $\mathbf{R}$ සඳහා ප්‍රකාශනයක් ලියා

$$\mathbf{G} = -4\mathbf{i} + (2\lambda + 14)\mathbf{j} + (\lambda + 9)\mathbf{k}$$

බව පෙන්වන්න.

පද්ධතිය, $\mathbf{F}$ තනි බලයකට ඌනනය වන පරිදි λ හි අගය නිර්ණය කරන්න. එවිට $\mathbf{F}$ සොයා එහි ක්‍රියා රේඛාවේ දෛශික සමීකරණය μ පරාමිතියක් වූ, $\mathbf{r} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k} + \mu(\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k})$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න.