සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
முழுப் பதிப்புரிமையுடையது]
All Rights Reserved]

13672

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம் / Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1998 අගෝස්තු (නව නිර්දේශය)
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர(உயர் தர)ப் பரீட்சை, 1998 ஆகஸ்ற் (புதிய பாடத்திட்டம்)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1998 (New Syllabus)

ශුද්ධ ගණිතය I
தூய கணிதம் I
Pure Mathematics I

05	
S	I

පැය තුනයි / மூன்று மணித்தியாலம் / Three hours

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

---

1. (අ) S සර්වත්‍ර කුලකයෙහි A සහ B උපකුලක ලෙස ගනිමු. ඔබ හාවිත කරන කුලක විජයේ නියම ප්‍රකාශ කරමින්

$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B).$$

ඔව් සාධනය කරන්න.

$f(n) = (n-1)(n-2)+2$ මගින් $f: \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ අර්ථ දක්වේ යැයිද, $X \subseteq \mathbb{Z}^+$ සඳහා $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ යැයිද ගනිමු. $A = \{1, 3, 5\}$ සහ $B = \{2, 4, 5\}$ නම් $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ සහ $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$ බව පෙන්වන්න.

(ආ) $g: A \to B$ සහ $h: B \to A$, එක් එක් $b \in B$ සඳහා $(g \circ h)(b) = b$ වන පරිදි ගනිමු.
h එකට එක බව ද, g මතට බව ද පෙන්වන්න.
$A = \mathbb{R}$ ද, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ ද ලෙස ගනිමු. $g_0: A \to B$ සහ $h_0: B \to A$ පිළිවෙළින් $g_0(a) = a^2$ සහ $h_0(b) = \sqrt{b}$ මගින් අර්ථ දක්වේ නම්,
එක් එක් $b \in B$ සඳහා $(g_0 \circ h_0)(b) = b$ බව පෙන්වන්න.
එක් එක් $a \in A$ සඳහා $(h_0 \circ g_0)(a) = a$ සත්‍ය වේ ද? ඔබේ පිළිතුර යනාථ කරන්න.

2. (අ) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ හි සාධක සොයන්න.
ප්‍රතිඵන p, q, r සඳහා $x^3 + y^3 + z^3 = 3(p-q)(q-r)(r-p)$ සහ $px + qy + rz = 0$ ද, $x + y + z = 0$ ද නම් $x = q - r$, $y = r - p$ සහ $z = p - q$ බව පෙන්වන්න.

(ආ) $n\ (>1)$ යනු දී ඇති නිඛිලයක් ද $t > 0$ ද ලෙස ගනිමු. t විචලනය වන විට $(n+1)t + \frac{n-1}{t}$ හි අඩුතම අගය වන l සොයන්න.

$k > l$ විට $(n+1)t + \frac{n-1}{t} = k$ සමීකරණයෙහි මූල දෙකම ධන බව පෙන්වන්න.

$(n+1)t + \frac{n-1}{t} = \sqrt{8n(n+1)}$ හි වඩා විශාල මූලය n ඇසුරෙන් සොයන්න.

3. (අ) (i) $\frac{x}{x-1} < \frac{x}{x-2}$ වන x හි අගය කුලකය සොයන්න.

(ii) එකම රූප සටහනක $y = 3 - |x+2|$ සහ $y = |2x - 3x^2 + x^3|$ මගින් දෙනු ලබන වක්‍රවල කටු සටහන් අඳින්න.
$3 - |x+2| \geq y \geq |2x - 3x^2 + x^3|$ අසමානතාවයන් තෘප්ත වන පෙදෙස අඳුරු කරන්න.

(ආ) සියලු තාත්ත්වික x සඳහා $x^2 + 2x + 3 > 0$ බව පෙන්වීමට "විප•වාදයක් මගින් සාධනය" හාවිත කරන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

4. (අ) 3528 හි ධන භාජක සංඛ්‍යාව සොයන්න. (සටහන : $3528 = 2^3 \times 3^2 \times 7^2$)

(ආ) විද්‍යා සමූළුවකට විශ්ව විද්‍යාල 20 ක් සහභාගි වන අතර එක් එක් විශ්ව විද්‍යාලය උද්භිද විද්‍යාඥයෙකු, රසායන විද්‍යාඥයෙකු, ගණිතඥයෙකු, භෞතික විද්‍යාඥයෙකු සහ සත්ත්ව විද්‍යාඥයෙකු අනුග්‍රහ කරයි. සාමාජිකයින් 10 කින් සමන්විත එක් එක් කමිටුව තුළ

(i) එක් එක් විෂය ක්ෂේත්‍රයෙන් පුද්ගලයින් දෙදෙනෙකු බැගින්

(ii) එක් එක් සාමාජිකයා වෙනස් විශ්ව විද්‍යාලයක් නියෝජනය කරන පරිදි එක් එක් විෂය ක්ෂේත්‍රයෙන් පුද්ගලයින් දෙදෙනෙකු බැගින්

(iii) ඕනෑම විශ්ව විද්‍යාල කුනකින් පුද්ගලයින් තිදෙනෙකු බැගින් ද ඕනෑම තවත් විශ්ව විද්‍යාලයකින් එක් පුද්ගලයෙකු ද බැගින්

සිටින පරිදි කමිටුවක් සෑදිය හැකි ආකාර කොපමණ ද?

[(ආ) කොටසේ පිළිතුරු සුළු කිරීම අවශ්‍ය නැත.]

5. (අ) n සහ k යනු $n \geq k$ වන පරිදි වූ ධන නිඛිල ලෙස ගනිමු.

සුප්‍රසිද්ධ අංකනයෙන්

(i) ${}^{n+1}C_k = {}^nC_k + {}^nC_{k-1}$,

(ii) $n > 1$ සඳහා $\sum_{r=k+1}^{n} {}^rC_k = {}^{n+1}C_{k+1} - 1$

බව පෙන්වන්න.

$\sum_{r=1}^{n} r = \frac{n(n+1)}{2}$ සහ $\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ බව අපෝහනය කරන්න.

(ආ) $(2+\sqrt{2x}+x)^2 (2+x)^n$ හි ප්‍රසාරණයෙහි x^r හි සංගුණකය සොයන්න; මෙහි n යනු ධන නිඛිලයක් වන අතර r යනු $n+3$ ට වඩා අඩු සෘණ නොවන නිඛිලයකි.

x^3 හි සංගුණකය $\frac{2^{n-2}}{3}(n^3 + 6n^2 - n)$ බව පෙන්වන්න.

6. (අ) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \frac{2r+3}{r^2(r+1)^2(r+2)^2(r+3)^2}$ සහ $f(r) = \frac{k}{r^2(r+1)^2(r+2)^2}$ ලෙස ගනිමු;

මෙහි k යනු නියතයකි.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = f(r) - f(r+1)$ වන පරිදි k හි අගය සොයන්න.

(i) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $g(r)$ ද, $U_r = g(r) - g(r+1)$ තෘප්ත කරයි නම්, $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $g(r) = f(r) + c$ බව පෙන්වන්න; මෙහි c යනු නියතයකි.

(ii) $\sum_{r=1}^{n} U_r$ සොයා $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අභිසාරී බව අපෝහනය කරන්න.

(ආ) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ සහ $n = 3, 4, \cdots$ සඳහා $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-2} + x_{n-1})$ ලෙස ගනිමු. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතයෙන් $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $|x_n - x_{n+1}| = \frac{1}{2^{n-1}}$ බව සාධනය කරන්න.

7. (අ) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{5+x^2}-\sqrt{5}}{\sqrt{20+\sin^2 x}-\sqrt{20}}$ අගයන්න.

(ආ) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ශ්‍රිතය පහත දක්වෙන පරිදි අර්ථ දක්වේ.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 1 \text{ නම්} \\ 1998, & x = 1 \text{ නම්} \end{cases}$$

$\lim_{x \to 1} f(x)$ පවතී ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

එක් එක් $a \in \mathbb{R}$ සඳහා $\lim_{x \to a} f_1(x) = \lim_{x \to a} f_2(x)$ වන පරිදි $f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ සහ $f_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ වෙනස් ශ්‍රිත දෙකක් ලියා දක්වන්න.

(ඇ) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ශ්‍රිතය පහත දක්වෙන පරිදි අර්ථ දක්වේ :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{9}{5}(x-1)(x-2)(x-37), & 1 \leq x \leq 7 \text{ හෝ } 37 \leq x \text{ නම්} \\ 54x - c, & x < 1 \text{ හෝ } 7 < x < 37 \text{ නම්} \end{cases}$$

37 හිදී g සන්තතික වන පරිදි c සොයන්න. මෙම c හි අගය සඳහා 7 හිදී g සන්තතික බවත් 1 හිදී සන්තතික නොවන බවත් පෙන්වන්න.

8. (අ) f යනු $\mathbb{R}$ හි එක් එක් x හිදී $(f(x))^3 - x(f(x))^2 - x^2 f(x) - 2x^3 - 7x^4 + 7x^5 = 0$ අවශ්‍යතාවය තෘප්ත කරන $\mathbb{R}$ මත අවකලනය වන ශ්‍රිතයක් යැයි සිතමු.

ව්‍යුත්පන්නයෙහි අර්ථ දක්වීම භාවිතයෙන් $f'(0) = 2$ බව පෙන්වන්න. $f'(1)$ අගයන්න.

(ආ) $x > 1$ සඳහා $y = \left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^x$ නම්, $\dfrac{dy}{dx}$ සොයන්න.

(ඇ) $x^2 + 2xy - y^2 = \tan^{-1} x - 9$ නම් $(0, 3)$ ලක්ෂ්‍යයෙහි දී $\dfrac{dy}{dx}$ සොයන්න.

9. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 7x + 12}$ ලෙස ගනිමු.

(i) x හි කිසිම තාත්ත්වික අගයක් සඳහා $-7 - 4\sqrt{3}$ සහ $-7 + 4\sqrt{3}$ අතර $f(x)$ නොපිහිටන බව පෙන්වන්න.

(ii) $A + \dfrac{B}{x-4} + \dfrac{C}{x-3}$ ආකාරයෙන් $f(x)$ ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි A, B සහ C නියත වේ.

ඒ නයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ f හි උපරිම සහ අවම සොයන්න.

(iii) f හි සිරස් සහ තිරස් ඇසිම්ප්ටෝත්වල සමීකරණ සොයන්න.

(iv) f හි ප්‍රස්තාරයෙහි තවු සටහනක් අඳින්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

10. (අ) $\dfrac{1}{(x^2-1)(x^2-3x+2)}$ හිත්න හාග ලෙස ප්‍රකාශ කරන්න.

ඒ නයින් $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-1)(x^2-3x+2)}$ සොයන්න.

(ආ) $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ බව පෙන්වා ඒ නයින් $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\,dx}{\sin x + \cos x} = \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x + \cos x}$ බව පෙන්වන්න.

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\,dx}{\sin x + \cos x} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \ln\left(\sqrt{2}+1\right)$ බව අපෝහනය කරන්න.

11. (අ) නිව්ටන්-රැප්සන් පුනඃකරණ සූත්‍රය ප්‍රකාශ කරන්න.

$x>0$ වන $f(x) = x - \dfrac{5}{x}$ ට 1 සහ 3 අතර මූලයක් ඇති බව පෙන්වන්න.

පුනඃකරණ සූත්‍රයෙහි මූලයට ආරම්භක සන්නිකර්ෂණය $x_0 = 2$ ලෙස ගනිමින් පුනඃකරණ සූත්‍රයෙහි n වෙනි සන්නිකර්ෂණය වන x_n, සෑම n සඳහා ම $0 < x_n \le \sqrt{5}$ සහ $x_{n+1} \ge x_n$ අසමානතා තෘප්ත කරන බව පෙන්වන්න.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ පවතින බව උපකල්පනය කරමින්, මෙම සීමාව $f(x)=0$ හි අවශ්‍ය මූලය බව සාධනය කරන්න.

(ආ) $x > -1$ සඳහා $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$ නම්,

$r = 1, 2, \cdots$ සඳහා $\dfrac{d^r g(x)}{dx^r} = \dfrac{(-1)^r r!}{(x+1)^{r+1}}$ බව ගණිතමය අනුහනයෙන් පෙන්වන්න.

$g(x)$ හි මැක්ලෝරින් ශ්‍රේණිය $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ බව අපෝහනය කරන්න.

12. (අ) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 - xy + y^2}{xy}$ අවකල සමීකරණය විසඳන්න.

(ආ) $\dfrac{dy}{dx} = v$ ආදේශය භාවිතයෙන් $2y\dfrac{d^2y}{dx^2} = 1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$ යන දෙවන ගණයෙහි අවකල සමීකරණය,

$2vy\dfrac{dv}{dy} = 1 + v^2$ යන පළමුවන ගණයෙහි අවකල සමීකරණයට පරිණාමනය කරන්න.

ඒ නයින්, දී ඇති දෙවන ගණයෙහි අවකල සමීකරණය විසඳන්න.

(ඇ) ඕර්ජ, මූල ලක්ෂ්‍යයෙහි ද, x-අක්ෂය, පොදු අක්ෂය ලෙස ද ඇති පරාවල කුලයෙහි ප්‍රලම්බ පරාවෘත්ත සොයන්න.

13722

සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
முழுப் பதிப்புரிமையுடையது]
All Rights Reserved]

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம் / Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1998 අගෝස්තු (නව නිර්දේශය)
கல்விப் பொதுத் தராதரப்பத்திர(உயர் தர)ப் பரீட்சை, 1998 ஆகஸ்ற் (புதிய பாடத்திட்டம்)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1998 (New Syllabus)

ශුද්ධ ගණිතය II
தூய கணிதம் II
Pure Mathematics II

05	
S	II

පැ තුනයි / மூன்று மணித்தியாலம் / Three hours

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

---

1. ගණය 3 වූ **A** සහ **B** සමචතුරශ්‍ර න්‍යාස සඳහා $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ බව සාධනය කරන්න.

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ සහ } \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & -a & ac-b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ලෙස ගනිමු.}$$

$\mathbf{CD} = \mathbf{DC} = \mathbf{I}$ බව සත්‍යාපනය කරන්න; මෙහි **I** යනු 3 වන ගණයේ ඒකක න්‍යාසය වේ.

$$\begin{aligned} 6x - 3y - 2z &= 3 \\ -3x + 2y + z &= 2 \\ -2x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

ඒකජ සමීකරණ පද්ධතිය $\mathbf{AX} = \mathbf{H}$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ සහ $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ වන අතර **A** නිර්ණය කළ යුතුවේ.

$\mathbf{CC}^T = \mathbf{A}$ වන පරිදි a, b, c සොයා $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$ වන පරිදි **B** න්‍යාසයක් ලබාගන්න. ඒ නයින් දී ඇති ඒකජ සමීකරණ පද්ධතිය විසඳන්න.

2. (අ) a සහ b ප්‍රභින්න නියත වූ

$$\begin{vmatrix} a^2 & 1-a^2 & 1+a^3 \\ b^2 & 1-b^2 & 1+b^3 \\ x^2 & 1-x^2 & 1+x^3 \end{vmatrix} = 0$$

සමීකරණය විසඳන්න.

$a = -b$ වන විට සමීකරණයේ මාත්‍රය කුමක් ද?

(ආ) (i) xy - තලය එයටම අනුරූපණය කරන $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ඒකජ පරිණාමනය $ad \neq bc$ නම් තලයේ පිහිටි එක් එක් සරල රේඛාව, සරල රේඛාවකට අනුරූපණය කරන බව සාධනය කරන්න.

(ii) l යනුවෙන් xy - තලයේ පිහිටියා වූ ද, මූල ලක්ෂ්‍යය හරහා යන්නා වූ ද, x - අක්ෂයට α කෝණයකින් ආනත වන රේඛාවක් ගනිමු.

xy - තලය එයට ම අනුරූපණය කරන $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ඒකජ පරිණාමනය තලයේ පිහිටි එක් එක් ලක්ෂ්‍යය, l මත එම ලක්ෂ්‍යයේ පරාවර්තනයට අනුරූපණය කරන බව පෙන්වන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

3. z_1 සහ z_2 යනුවෙන් සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ගනිමු.

(i) $Re(z_1\bar{z}_2) = Re(\bar{z}_1 z_2)$

(ii) $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 - 2\,Re(z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2$

බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින් $|1 - z_1\bar{z}_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)$

බව පෙන්වන්න.

$|z_2| < 1$ සහ $z_1\bar{z}_2 \neq 1$ ලෙස ගනිමු.

1 ට වඩා $|z_1|$ අඩුවීම හෝ වැඩිවීම හෝ අනුව 1 ට වඩා $\left|\dfrac{z_1 - z_2}{1 - z_1\bar{z}_2}\right|$ අඩු හෝ වැඩි හෝ වන බව පෙන්වන්න.

α යනු $2z^5 - iz^4 - iz - 2 = 0$ සමීකරණයේ මූලයක් නම් $|\alpha| = 1$ බව අපෝහනය කරන්න.

[ඉඟිය : දී ඇති සමීකරණය $\dfrac{1}{z^4} = \dfrac{z - \frac{i}{2}}{1 + \frac{iz}{2}}$ ලෙස ලියන්න.]

4. (අ) ආගන්ඩ් සටහනේ P_1, P_2 ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් z_1, z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරයි. ආගන්ඩ් සටහනෙහි, $z_1 + z_2$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යය ලබාගැනීම සඳහා ජ්‍යාමිතික නිර්මාණයක් දෙන්න.

(i) $|z_1 - z_2| = P_1P_2$

(ii) $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$ ද, z_1 සහ z_2 නිශ්ශූන්‍ය ද නම් $\left|Arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)\right| = \dfrac{\pi}{2}$

(iii) $\left|Arg\left(\dfrac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}\right)\right| = \dfrac{\pi}{2}$ නම් $|z_1| = |z_2|$

බව පෙන්වන්න.

(ආ) ආගන්ඩ් සටහනෙහි A, B, P ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් a, b, z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරයි. A සහ B යනු අවල ලක්ෂ්‍යයන් ද, P යනු $\left|\dfrac{z - a}{z - b}\right| = k$ (නිශ්ශූන්‍ය නියතයක්) වන පරිදි වූ විචල්‍ය ලක්ෂ්‍යයක් ද නම් $k = 1$ සහ $k \neq 1$ අවස්ථා දෙක වෙන වෙනම සලකමින් P හි පථය සොයන්න.

5. (අ) $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ යනුවෙන් ඕනෑම දෙයික තුනක් ගනිමු. $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z}$ අදිශ ත්‍රිත්ව ගුණිතය $[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]$ මගින් දක්වමු.

$[\mathbf{x} + \mathbf{y},\ \mathbf{y} + \mathbf{z},\ \mathbf{z} + \mathbf{x}] = 2\,[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]$ බව සාධනය කරන්න.

(ආ) O මූල ලක්ෂ්‍යයක් අනුබද්ධයෙන් A, B, C, D ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෙයික පිළිවෙළින් $4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\lambda\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $3\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $-4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ වේ; මෙහි λ පරාමිතියකි.

A, B, D ඒකරේඛීය වීම පිණිස λ ගතයුතු අගය නිර්ණය කරන්න. A, B, D ලක්ෂ්‍ය ඒකරේඛීය නොවන විට A, B, C, D ලක්ෂ්‍ය ඒකතල නොවන බව පෙන්වන්න.

6. (අ) O මූල ලක්ෂ්‍යයක් අනුබද්ධයෙන් P, Q, R ලක්ෂ තුනෙහි පිහිටුම් දෙයිස පිළිවෙළින් $5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ වේ.

(i) $\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$ ආකාරයෙන් PQ රේඛාවේ දෙයිස සමීකරණය ලියන්න.

(ii) PQ මත R පිහිටන බව පෙන්වන්න.

(iii) PQ සහ දෙයිස සමීකරණය $\mathbf{r} = -\mathbf{i} + 11\mathbf{j} + 7\mathbf{k} + \lambda(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$ වන l රේඛාව, ලක්ෂ්‍යය දී ඡේදනය වන බව පෙන්වන්න. මෙම ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටුම් දෙයිසය ද, PQ සහ l අඩංගු තලයට අභිලම්බ වූ ඒකක දෙයිසයක් ද සොයන්න.

(ආ) $OABC$ යනු සවිපිටි චතුස්තලයක් වේ. දෙයිස ක්‍රම භාවිතයෙන් BOC සහ AOC කෝණ වල අභ්‍යන්තර සමච්ඡේදක අතර කෝණය නිර්ණය කරන්න; මෙහි අදළ සමච්ඡේදක BOC සහ AOC මුහුණත් මත පවතින බවට ඥාන ඇත.

7. $f(x) = \frac{3}{2}\sin 2x + 2\cos 2x$ ලෙස ගනිමු. $f(x) = \frac{5}{2}\sin(2x + \alpha)$ වන පරිදි $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$ පරාසය තුළ α අගයක් පවතින බව පෙන්වන්න.

(i) $f(x) = 0$ වීමට

(ii) $f(x)$ ට උපරිමයක් පැවැතීමට

(iii) $f(x)$ ට අවමයක් පැවතීමට

x ගත යුතු අගයයන් සොයන්න.

f යි සහ $g(x) = f(x - \alpha)$ මගින් අර්ථ දක්වෙන g යි ප්‍රස්තාර එකම රූප සටහනේ $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ සඳහා කවු සටහන් කරන්න.

ඒ සයින් $h(x) = \frac{3}{2}\sin 2x + 2|\cos 2x|$ මගින් අර්ථ දක්වෙන h යි ප්‍රස්තාරය $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ සඳහා කවු සටහන් කරන්න.

8. (අ) ත්‍රිපුරුදු අංකනයෙන් ත්‍රිකෝණයක් සඳහා "සයින නීතිය" ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.
එම අංකනයෙන් ම

(i) $\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\sin\frac{C}{2}}$ (ii) $\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\cos\frac{C}{2}}$

බව සාධනය කරන්න.

ත්‍රිකෝණයක් සඳහා "කොසයින නීතිය" අපෝහනය කරන්න.

(ආ) $2\tan^{-1}(\sin x) = \tan^{-1}(2\sec x)$ විසඳන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

9. (a, b) ලක්ෂ්‍යය හරහා යන්නාවූ ද, x - අක්ෂය සමඟ θ කෝණයකින් ආනතවූ ද සරල රේඛාව, පරාමිතිකව $x = a + t\cos\theta$, $y = b + t\sin\theta$ මගින් නිරූපණය කළ හැකි බව පෙන්වන්න.

OAB ත්‍රිකෝණයේ O ශීර්ෂය, මූලලක්ෂ්‍ය මත ද, A ශීර්ෂය, පළමුවන පාදකයේ ද, පිහිටන අතර $OB = 2OA$ ද, OA හි සහ OB හි සමීකරණ පිළිවෙළින් $x - 2y = 0$ සහ $2x + y = 0$ ද වේ. $(5, 1)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා AB යන්නේ නම් AB සඳහා නිවේශන දෙකක් සිඳිය හැකි බව පෙන්වන්න. එම එක් එක් නිවේශනය සඳහා A හි සහ B හි බණ්ඩාංක සොයන්න.

සිඳිය හැකි OAB ත්‍රිකෝණ දෙකේ වර්ගඵලවල අනුපාතය සොයන්න.

10. $A = (1, 2)$ සහ $B = (3, 2)$ ලෙස ගනිමු. $P = (x, y)$ යනුවෙන් APB කෝණය නියතයක් වන පරිදි විචල්‍ය ලක්ෂ්‍යයක් ගනිමු.

(i) $\angle APB = 90^\circ$ නම් P ලක්ෂ්‍යය $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$ වෘත්තය මත පිහිටන බව සාධනය කරන්න.
P හි පථය කුමක් ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

(ii) $\angle APB = 135^\circ$ නම් P ලක්ෂ්‍යය එක්කෝ $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$ වෘත්තය මත නැත්නම් $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 11 = 0$ වෘත්තය මත පිහිටන බව සාධනය කරන්න. P හි පථය කුමක් ද?
මෙම වෘත්ත දෙක සඳහුකෝණි ව ඡේදනය වන බව පෙන්වන්න.

11. (අ) $t > 0$ වූ $x = t - \dfrac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1}$ සහ $y = \dfrac{2e^t}{e^{2t} + 1}$ පරාමිතික සමීකරණ මගින් C වක්‍රයක් දෙනු ලබයි.
පරාමිතිය t වූ P ලක්ෂ්‍යයේ දී C ට ඇඳි ස්පර්ශකයේ බැවුම $\dfrac{-2e^t}{e^{2t} - 1}$ බව පෙන්වන්න.
P හිදී ඇඳි ස්පර්ශකය Q හිදී x - අක්ෂය ඡේදනය කරන්නේ යැයි ගනිමු. PQ දිග t තෙරෙන් ස්වායත්ත බව පෙන්වන්න.

(ආ) a සහ b තාත්ත්වික සංඛ්‍යා නම් $r = a\cos\theta + b\sin\theta$ ධ්‍රැවක සමීකරණය වෘත්තයක් නිරූපණය කරන බව පෙන්වා එහි කේන්ද්‍රය සහ අරය සොයන්න.
$r = 4\cos\theta$ සහ $r = 2\sin\theta$ වෘත්ත දෙකට ඇඳිය හැකි පොදු ස්පර්ශක වල ධ්‍රැවක සමීකරණ සොයන්න.

12. $S \equiv \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ ඉලිප්සය, $y = mx + c$ රේඛාව ස්පර්ශ කිරීම සඳහා පැවතිය යුතු අවශ්‍යතාවය සොයන්න.

ඒ නයින්, $\alpha \neq \pm a$ සහ $\beta \neq \pm b$ වූ $P = (\alpha, \beta)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන රේඛාවක්, $S = 0$ ස්පර්ශ කිරීම සඳහා පැවතිය යුතු අවශ්‍යතාවය ලබාගන්න.
P ලක්ෂ්‍යයේ සිට $S = 0$ ඉලිප්සයට ඇඳි ස්පර්ශක, x -අක්ෂය L සහ M හිදී කපයි. LM හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය $(b, 0)$ නම් P හි පථය පරාවලයක් මත පිහිටන බව පෙන්වන්න. පරාවලයේ නියාමකයේ සමීකරණය ද, නාභියේ බණ්ඩාංක ද සොයන්න.