සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
முழுப் பதிப்புரிமையுடையது]
All Rights Reserved]

007580

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம் / Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1997 අගෝස්තු (නව නිර්දේශය)
கல்விப் பொதுத் தராதரப்பத்திர(உயர் தர)ப் பரீட்சை, 1997 ஒகஸ்ற் (புதிய பாடத்திட்டம்)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1997 (New Syllabus)

ශුද්ධ ගණිතය I
தூய கணிதம் I
Pure Mathematics I

05	
S	I

පැ තුනයි / மூன்று மணி / Three hours

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

---

1. (අ) A, B, C යනු ξ සර්වත්‍ර කුලකයෙක ඕනෑම උපකුලක තුනක් යැයි සිතමු.
$A - B$ අර්ථ දක්වන්න.
වෙන් රූප සටහන් භාවිත නොකර
$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$ සහ $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$
බව සාධනය කරන්න. [කුලක විජ ගණිතයේ යම් න්‍යායයන් ඔබ උපයෝගී කර ගත්තේ නම් එවා ප්‍රකාශ කළ යුතුය.]
$\xi = \mathbb{N}$ යැයි ගෙන,
$A-(B\cap C)=(A-B)\cap C$
යන්න අනිවාර්යයෙන්ම සත්‍ය නොවන බව පෙන්වීම සඳහා ප්‍රති නිදර්ශනයක් සොයන්න.

(ආ) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$, $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$ සහ $h:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ යනු පිළිවෙලින්
$f(x)=x^2-2$, $g(x)=|x+2|$ සහ $h(x)=\sqrt{x}$ මගින් අර්ථ දක්වෙන ශ්‍රිත යැයි සිතමු.
f එක-එක වුව ද මතට නොවන බව ද g මතට වුව ද එක - එක නොවන බව ද සාධනය කරන්න.
$g\circ f$ සහ $h\circ g$ සංයුක්ත ශ්‍රිත සොයන්න; මෙහි $(f_1\circ f_2)(x)$ යන්නෙන් $f_1(f_2(x))$ ගෙන දේ.
එනයින්, $h\circ(g\circ f)$ සහ $(h\circ g)\circ f$ ශ්‍රිත සමාන බව සාධනය කරන්න.

2. (අ) $f(a,b,c)\equiv(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$ හි සාධක සොයන්න.
$f(a,b,c)$ යන්න,
$(a+b+c)^{1997}-a^{1997}-b^{1997}-c^{1997}$ හි සාධකයක් බව අපෝහණය කරන්න.

(ආ) α සහ β යනු $x^2+qx+1=0$ සමීකරණයේ මූල යැයි ද γ සහ δ යනු $x^2+x+q=0$ සමීකරණයේ මූල යැයි ද සිතමු.
$(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\delta)=(\gamma^2+q\gamma+1)(\delta^2+q\delta+1)$
බව පෙන්වන්න.
දී ඇති වර්ගජ සමීකරණ දෙකටම පොදු වූ තාත්ත්වික මූල, අඩුවශයෙන් එකක්වත් තිබෙන පරිදි වූ q හි අගය සියල්ල නිර්ණය කරන්න.

3. (අ) (i) (α) $x^3+3x^2<x+3$
(β) $|x+2|+|x-3|<7$
ඉහත සඳහන් එක් එක් අසමානතාව සඳහා එය තෘප්ත කරන x හි අගයයන් කුලකය සොයන්න.
(ii) එකම රූ සටහනෙහි, $y=x^2-4x+3$ සහ $x^2+y^2=4$ වෘත්තවල දළ රූ සටහන් ඇඳ, $y\le x^2-4x+3$ සහ $x^2+y^2\le 4$ අසමානතා දෙකම සපුරාලන පෙදෙස් අඳුරු කරන්න.

(ආ) "විසංවාදයක් මගින් සාධනය" ක්‍රමය යොදා, x^3+2x^2+2x+2 යන්නට, $x\pm n$ ආකාරයේ සාධකයක් නොතිබෙන බව පෙන්වන්න; මෙහි n යනු ධන නිඛිලයකි.

[අනෙක් පිට බලන්න.

4. (අ) *"COEFFICIENT"* වචනයෙහි අක්ෂර 11 ත් සැදෙන විවිධ සංකරණ සංඛ්‍යාව සොයන්න.
කවද, *COEFFICIENT* වචනයෙහි අක්ෂර 11 ත් සැදිය හැකි, අක්ෂර හතරක් අඩංගු එකිනෙකට වෙනස් පේරීම් සංඛ්‍යාව ද සොයන්න.

(ආ) *A* බඳුනෙහි සුදු බෝල 8 ක් සහ කලු බෝල 6 ක් තිබෙන අතර *B* බඳුනෙහි සුදු බෝල 6 ක් සහ කලු බෝල 3 ක් තිබේ.

(i) බෝල 6 ම එකම බඳුනෙන් ලැබේ නම්

(ii) කලු බෝල බඳුන් දෙකෙන් හිනැම එක් බඳුනකිනුත් සුදු බෝල අනෙක් බඳුනෙනුත් ලැබේ නම්

(iii) බෝල ලැබෙන බඳුන සම්බන්ධයෙන් කිසිම සීමාකිරීමක් නොමැති නම්

එක් එක් අවස්ථාව සඳහා, සුදු බෝල 4 ක් සහ කලු බෝල 2 ක් ඇතුලත් වන සේ බෝල 6 බින් යුත් කාණ්ඩ කොපමණක් තෝරා ගත හැකි ද?

5. (අ) $(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} C_r x^r$ යන්න උපකල්පනය කිරීමෙන් $\sum_{r=0}^{n} C_r$ සහ $\sum_{r=0}^{n} C_r^2$ ලබා ගන්න; මෙහි $n \in \mathbb{N}$.

එනයින්, $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n$ අතරෙන් වරකට දෙකක් බැගින් ගත් විට ලැබෙන ගුණිතවල එකතුව සොයන්න.

(ආ) λ නිශ්ශූන්‍ය නියතයක් විට,

$(1-\lambda x)^9 = 1 - px + qx^2 - rx^3 + \ldots$ යැයි දී ඇති විට, p හි අගයත් q හි අගයත් r හි අගයත් λ ඇසුරෙන් ලබාගන්න.

එනයින්, $(1-x)^9(1-3x)^9$ හි ප්‍රසාරණයේ x^3 හි සංඛ්‍යාත්මක සංගුණකය සොයන්න.

6. (අ) $r \geq 1$ සඳහා,

$$u_r = \frac{\sqrt{r}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\ldots(1+\sqrt{r})}$$

යැයි දී ඇත.
$r > 1$ සඳහා $f(r-1) - f(r) = u_r$ වන පරිදි $f(r)$ සොයන්න.

$\sum_{r=1}^{n} u_r = 2u_1 - \frac{u_n}{\sqrt{n}}$ බව පෙන්වන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty} u_r$ යන්න 1 ට අභිසාරී වන බව පෙන්වීම සඳහා ඉහත ප්‍රතිඵලය යොදන්න.

(ආ) $n \geq 1$ සඳහා, $S_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{r}}$ යැයි ගනිමු. ගණිත අභ්‍යුහනය පිළිබඳ මූලධර්මය යෙදීමෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ,

$n \geq 1$ සඳහා $\sqrt{n} \leq S_n \leq 2\sqrt{n}$ බව සාධනය කරන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{r}}$ ශ්‍රේණිය අපසාරී බව අපෝහණය කරන්න.

$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ යනු $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ වන පරිදි වූ ධන පදවලින් යුත් අනුක්‍රමයක් නම්,

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ශ්‍රේණිය අනිවාර්යයෙන්ම අභිසාරී වේ යැයි නිගමනය වේ ද?
ඔබගේ උත්තරයට හේතු දක්වන්න.

7. (අ) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{4+x^2}-2}{x^2}$ සොයන්න.

(ආ) සුදුසු ශ්‍රිත අවකලනය කිරීමෙන්, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ සඳහා $x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x < x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$ බව සාධනය කරන්න.

එනයින්, $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{x - \sin x}{x^3} = \dfrac{1}{6}$ බව පෙන්වන්න.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3} = \dfrac{1}{6}$ බව අපෝහණය කරන්න.

(ඇ) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ශ්‍රිතය පහත දක්වෙන අයුරින් අර්ථ දක්වේ.

$$f(x) = \begin{cases} 25x^2 & , \ \dfrac{-3}{25} \leq x \leq 80 \\ mx + 240 & , \ 80 < x \ \text{ හෝ } \ x < -\dfrac{3}{25} \end{cases}$$

m ට විශේෂ අගයක් දීමෙන් $\mathbb{R}$ තුල සැම x හි දී f සන්තතික කළ හැකි බව පෙන්වන්න.

m හි අගය ප්‍රකාශ කළ යුතුය.

8. (අ) f යනු, $f(0) = 0$ සහිතව $x = 0$ දී අවකලනය වූ x හි ඉරට්ටේ ශ්‍රිතයක් නම්, $f'(0) = 0$ බව සාධනය කරන්න.

(ආ) ප්‍රමුලධර්ම මඟින්,

$$\frac{d}{dx}(\sin(3x)) = 3\cos(3x)$$

බව සාධනය කරන්න.

(ඇ) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ශ්‍රිතය මතු දක්වෙන අයුරින් අර්ථ දක්වේ.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 4x & , \ x \leq 0 \\ x(x-4) & , \ 0 < x < 3 \\ 2x - 9 & , \ 3 \leq x \end{cases}$$

$x = 0$ දී ත් $x = 3$ දී ත් f අවකලනය දයි නිර්ණය කරන්න.

(ඇ) $x > 0$ සඳහා $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ නම්

$$2y\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} + \frac{1}{4\sqrt{x(x+\sqrt{x})}}$$

බව පෙන්වන්න.

9. $f(x) = \dfrac{2x^2}{(x+2)(x-4)}$ ලෙස දී ඇත් නම්, f හි උපරිම සහ අවම (ඒවා පවතී නම්) සොයන්න.

තවද, $f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ සිරස් සහ තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛවල සමීකරණ ලබා ගෙන, $f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දල සටහනක් අඳින්න.

$f(x)$ හි ප්‍රස්තාරය භාවිත කරමින් $f(x) - \ln(x-3)$ හි ශූන්‍යයන් සංඛ්‍යාව නිර්ණය කරන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

10. (අ) f සහ g යනු $[-a, a]$ ප්‍රාන්තරය මත අඛණ්ඩ ශ්‍රිත දෙකක් යැයි සිතමු.
$[-a, a]$ හි සියලු ම x සඳහා $f(-x) = f(x)$ සහ $g(-x) = -g(x)$ යැයි සිතමු.

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx \quad \text{සහ} \quad \int_{-a}^{a} g(x)\,dx = 0$$

බව පෙන්වන්න.

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2 + x^3}{(4 - x^2)^{3/2}}\,dx$$ අගයන්න.

(ආ) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය යෙදීමෙන්,

$$\int_{0}^{a} x^2 h'''(x)\,dx = a^2 h''(a) - 2a h'(a) + 2h(a) - 2h(0)$$ බව පෙන්වන්න;

මෙහි $h'(x) = \frac{dh}{dx}$, $h''(x) = \frac{d^2h}{dx^2}$ සහ $h'''(x) = \frac{d^3h}{dx^3}$.

$$\int_{0}^{1} \frac{x^2}{(x+1)^{5/2}}\,dx$$ අගයන්න.

11. (අ) $f(x) = 0$ හි මූලයක් සඳහා ආසන්න අගයක් නිර්ණය කිරීම පිණිස වූ නිව්ටන් - රැප්සන් පුනරාවර්තන සූත්‍රය ව්‍යුත්පන්නය කරන්න.
$f(x) = 4x - e^x$ ට 0·3 සහ 0·4 අතර මූලයක් පවතින බව පෙන්වන්න. නිව්ටන් - රැප්සන් සූත්‍රයේ මූලය සඳහා ආරම්භක සන්නිකර්ෂණය $x_0 = 0{\cdot}35$ ලෙස ගනිමින්, මෙම මූලයට වැඩිදුර සන්නිකර්ෂණ දෙකක් ලබාගන්න. ඔබගේ උත්තර දශමස්ථාන තුනකට නිවැරදිව දිය යුතු ය. [$e = 2{\cdot}718$ බව උපකල්පනය කරන්න.]

(ආ) $y = \frac{e^x}{1 + x^2}$ ද $y^{(r)}$ යන්නෙන් $\frac{d^r y}{dx^r}$ ගෙන දේ ද නම්
$(1 + x^2)\,y^{(3)} + 6x\,y^{(2)} + 6\,y^{(1)} = e^x$
බව පෙන්වන්න.
ගණිත අභ්‍යුහනයෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $r \geq 3$ සඳහා $(1 + x^2)\,y^{(r)} + 2rx\,y^{(r-1)} + r(r-1)\,y^{(r-2)} = e^x$ බව සාධනය කරන්න.

එනයින්, $\frac{e^x}{1 + x^2}$ සඳහා මැක්ලෝරින් ශ්‍රේණියේ මුල් පද පහ ලබා ගන්න.

12. (අ) $\frac{dy}{dx} = \frac{3x + 5}{x^3 - x^2 - x + 1}$ අවකල සමීකරණය විසඳන්න.

(ආ) λ පරාමිතියක් විට, $x^2 + y^2 - 2\lambda y = 0$ සමීකරණයෙන් දෙනු ලබන වක්‍ර කුලය සලකන්න.
දී ඇති කුලයේ අවකල සමීකරණය නිර්ණය කරන්න.
ප්‍රලම්බ පරාවක්‍රවල අවකල සමීකරණය

$$2xy\frac{dy}{dx} - y^2 + x^2 = 0$$

බව පෙන්වන්න.
දී ඇති වක්‍ර කුලයේ ප්‍රලම්බ පරාවක්‍රවල සමීකරණ ලබා ගන්න.

සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
முழுப் பதிப்புரிமையுடையது]
All Rights Reserved]

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம் / Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1997 අගෝස්තු (නව නිර්දේශය)
கல்விப் பொதுத் தராதரப்பத்திர(உயர் தர)ப் பரீட்சை, 1997 ஒகஸ்ற் (புதிய பாடத்திட்டம்)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1997 (New Syllabus)

ශුද්ධ ගණිතය II
தூய கணிதம் II
Pure Mathematics II

05	
S	II

පැය තුනයි / மூன்று மணி / Three hours

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

---

1. (අ) $A = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & -y \end{bmatrix}$ සහ $B = \begin{bmatrix} x & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

යැයි දී ඇත් නම්, AB න්‍යාසය තුවික සම්මිතිය වන පරිදි වූ x හි අගයක් y අගයක් සොයන්න.

(ආ)
$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 2 \\ -2y + z &= 4 \\ 2y + z &= 8 \end{aligned}$$

සමීකරණ පද්ධතිය $AX = B$ ලෙස ප්‍රකාශ කළ හැකි පරිදි A න්‍යාසය ලියන්න ; මෙහි $X^T = [x, y, z]$ සහ $B^T = [2, 4, 8]$.

I යනු 3×3 ඒකක න්‍යාසයයි. $A^3 - 5A + 4I = 0$ බව පෙන්වන්න.

එනයින්, $CA = I$ වනසේ C න්‍යාසයක් සොයන්න.

දී ඇති සමීකරණ පද්ධතියේ විසඳුම් අපෝහනය කරන්න.

2. (අ) $A = \begin{bmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-b-a \end{bmatrix}$

යැයි දී ඇත්නම් $\det(A)$ හි අගය $(a+b+c)^3$ බව පෙන්වන්න.

(ආ) $S = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ යැයි දී ඇත්නම්, $\det(S - \lambda I) = 0$ වන පරිදි λ සඳහා λ_1 සහ λ_2 අගයයන් සොයන්න; මෙහි I යනු 2×2 ඒකක න්‍යාසයයි.

u_1 සහ v_1 ධන ලෙස ගනිමින්,

$SU = \lambda_1 U$, $U^T U = 1$ සහ $SV = \lambda_2 V$, $V^T V = 1$ සපුරාලන්නා වූ $U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ සහ $V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ සොයන්න.

$P = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix}$ යැයි ගනිමින්,

$P^T P = I$ සහ $PSP^T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ බව පෙන්වන්න.

$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ පරිණාමනයෙන් (x, y) මෙඛාංක පද්ධතිය (x', y') මෙඛාංක පද්ධතියට පරිණාමනය වේ.

$3x^2 + 2xy + 3y^2 = 4$ සමීකරණය නව මෙඛාංක පද්ධතියෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

3. (අ) z_1 සහ z_2 යනු, $z_1 + z_2$ සහ $z_1 z_2$ එක් එකක් සෘණ තාත්වික සංඛ්‍යා වන පරිදි වූ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා දෙකකි. z_1 සහ z_2 තාත්වික සංඛ්‍යා බව පෙන්වන්න.

(ආ) z_1, z_2 සහ z_3 යනු $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ සහ $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ වන පරිදි වූ නිශ්ශූන්‍ය සංකීර්ණ සංඛ්‍යා වේ. මෙම සංකීර්ණ සංඛ්‍යා, ආර්ගන් සටහනෙක සමපාද ත්‍රිකෝණයක ශීර්ෂ නිරූපණය කරන බව පෙන්වන්න.

(ඇ) ධන නිඛිලමය දර්ශකයක් සඳහා ද මුවාවර් ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න.
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ සහ $k = 0, 1, 2, 3$ සඳහා

$$z_k = \sqrt[4]{r}\left\{\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{4}\right)\right\}$$

යැයි දී ඇත්නම් $k = 0, 1, 2, 3$ සඳහා $z_k^4 = z$ බව පෙන්වන්න.

$k = 0, 1, 2, 3$ විට z_k වලින්, z හි චතුර්ථ මූලවන $z^{\frac{1}{4}}$ හි අගයන් හතර ගෙන දේ. $\left(16^{\frac{1}{4}}\right)^2$ අගය කුලකය, $(16^2)^{\frac{1}{4}}$ අගය කුලකයේ නියම උපකුලකයක් බව පෙන්වන්න.

4. ආර්ගන් සටහනෙහි, A, B සහ C ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් z_1, z_2 සහ z_3 සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවලට අනුරූප වේ.
AB සිට වාමාවර්ත අතට මිනුවිට AC හි ආනත කෝණය θ නම් ද $AB = AC$ නම් ද
$z_3 - z_1 = (z_2 - z_1)(\cos\theta + i\sin\theta)$ බව පෙන්වන්න.
$PQRS$ යනු ආර්ගන් සටහනෙහි සමචතුරස්‍රයකි.

(i) P සහ Q පිළිවෙළින් z_1 සහ z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවලට අනුරූප වේ නම් R සහ S ව අනුරූපවන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා z_1, z_2 ඇසුරෙන් සොයන්න.

(ii) Q සහ S පිළිවෙළින් z_1 සහ z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවලට අනුරූප වේ නම්, P සහ R ට අනුරූප වන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා z_1, z_2 ඇසුරෙන් සොයන්න.

(iii) P යනු $1 - i$ ට අනුරූප ලක්ෂ්‍යයද $PR = 2\sqrt{2}$ වන පරිදි R විචලනය වේ ද Q යනු z ට අනුරූප ලක්ෂ්‍යය ද නම් z සඳහා සම්බන්ධතාවක් ලබාගන්න. එනයින්, Q හි පථය නිර්ණය කරන්න.

5. $\mathbf{a}$ සහ $\mathbf{b}$ දෙගිණික දෙකෙහි $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$ අදිශ ගුණිතය සහ $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ දෙගිණික ගුණිතය අර්ථ දක්වන්න.

A, B, C යනු එක රේඛීය නොවන ලක්ෂ්‍ය තුනක් යැයි ද O යනු මූල ලක්ෂ්‍යය යැයි ද දී ඇත් නම්, $\left|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} \bullet \overrightarrow{OC}\right|$ රාශිය විවරණය කරන්න.

O මූල ලක්ෂ්‍යයට අනුබද්ධයෙන් A, B සහ C ලක්ෂ්‍ය තුනෙහි $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ සහ $\mathbf{c}$ පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ සහ $\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ වේ.

(i) $A\hat{B}C$ කෝණයේ කෝසයිනය
(ii) ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ග ඵලය
(iii) $OABC$ චතුස්තලයේ පරිමාව
(iv) $(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \bullet (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ හි අගය
සොයන්න.

6. O මූල ලක්ෂ්‍යයට අනුබද්ධයෙන් A, B, C ලක්ෂ්‍ය තුනෙක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ වේ.

(අ) D, E, F යනු පිළිවෙළින් BC, CA සහ AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය වන අතර AD සහ BE රේඛා G හි දී හමුවේ.
$\overrightarrow{AG} = \lambda\overrightarrow{AD}$ සහ $\overrightarrow{BG} = \mu\overrightarrow{BE}$ ලෙස ලියමින් හා G හි පිහිටුම් දෛශිකය සැලකීමෙන්, λ සහ μ හි අගයයන් ලබා ගන්න.
එනයින් C, G, F එක රේඛීය බව පෙන්වන්න.

(ආ) $OABC$ සමාන්තරාස්‍රයක් නම්, P යනු AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය ද OP රේඛාව Q හි දී AC සමුවේ ද නම් දෛශික යෙදීමෙන් $OQ = \frac{2}{3}OP$ බව සාධනය කරන්න.

(ඇ) $OA \perp BC$ සහ $OB \perp AC$ නම් $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ දෛශික අඩංගු සමීකරණ දෙකක් ලබා ගන්න.
ඒවා භාවිතයෙන්,
(i) $OC \perp AB$
(ii) $OA^2 + BC^2 = OB^2 + CA^2$
බව පෙන්වන්න.

7. a, h සහ b තාත්ත්වික සංඛ්‍යා වීට, $f(x) \equiv a\cos^2 x + 2h\sin x\cos x + b\sin^2 x$ යන්න $\cos 2x$ සහ $\sin 2x$ ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

$f(x)$ සඳහා $A + B\sin(2x + \alpha)$ ආකාරයේ ප්‍රකාශනයක් අපෝහනය කරන්න; මෙහි A, B සහ $\alpha (0 \le \alpha < 2\pi)$ යනු නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

එනයින්, $f(x)$ හි උපරිම හා අවම අගයයන් ද එම අගයයන් ගෙන දෙන $2\pi - \alpha \le x \le 2\pi + \alpha$ හි පිහිටි x හි අනුරූප අගයයන් ද ලබාගන්න.

$a = 3, b = 1$ සහ $h = \sqrt{3}$ වීට $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ සඳහා $f(x)$ හි ප්‍රස්තාරය අඳින්න.

8. (අ) (i) $\cos x + \cos(x + \alpha) + \cos(x + \beta) = 0$

සමීකරණයෙහි සාධාරණ විසඳුම් ලබාගන්න; මෙහි $0 < \alpha, \beta \le \frac{\pi}{2}$.

(ii) $x > -\sqrt{3}$ සඳහා, $\tan^{-1}x - \tan^{-1}\left(\frac{x\sqrt{3} - 1}{x + \sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$

බව පෙන්වන්න.

(ආ) ඕනෑම ත්‍රිකෝණයක් සඳහා කෝසයින නියමය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයක, $\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$ වන්නේ C කෝණය $= \frac{\pi}{3}$ නම් හා එනම් ම පමණක් වුවහොත් බව පෙන්වන්න.

9. (x_0, y_0) හරහා යන්නා වූ බැවුම් m වූ සරල රේඛාව මත පිහිටි ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක ඛණ්ඩාංක $(x_0 + t, y_0 + mt)$ ආකාරයට ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි t යනු පරාමිතියකි.

P වනාහි, $AP : PC = 1 : \lambda^2$ වන පරිදි $A(1, 0)$ සහ $C(4, 4)$ ලක්ෂ්‍ය යා කෙරෙන රේඛාව මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකි; මෙහි $\lambda > 0$. P හරහා AC ට ලම්බ වූ රේඛාව මත පිහිටි B ලක්ෂ්‍යයෙහි ඛණ්ඩාංක ඉහත ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න. t ඇසුරෙන් AB හි සහ BC හි බැවුම් කවරේ ද?

BC ට AB ලම්බ නම්, එවිට

(i) B සඳහා පිහිටීම් දෙකක් සිඳිය හැකි බව ද අනුරූප t හි අගයන් $\pm\frac{4\lambda}{1 + \lambda^2}$ බව ද

(ii) PBC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $\frac{1}{2}\frac{25\lambda^3}{(1 + \lambda^2)^2}$ බව ද පෙන්වන්න.

10. $S = 0$ වෘත්තයක් ද $u = 0$ සරල රේඛාවක් ද වේ. λ යනු විචල්‍ය පරාමිතියක් වීට, $S + \lambda u = 0$ සමීකරණය විචරණය කරන්න. $x^2 + y^2 = 4$ වෘත්තයේත් $x + y = 1$ රේඛාවේත් ඡේදන ලක්ෂ්‍ය හරහා යන Γ විචල්‍ය වෘත්තයක් $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ වෘත්තය P සහ Q හි දී ඡේදනය කරයි. PQ රේඛාව අචල ලක්ෂ්‍යයක් හරහා යන බව පෙන්වා එම ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න. PQ හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය, $2x^2 + 2y^2 - 5x + y + 3 = 0$ වක්‍රය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

11. (අ) වක්‍රයක් $x = \frac{a}{3}(2\cos t + \cos 2t)$, $y = \frac{a}{3}(2\sin t + \sin 2t)$, $0 \le t < 2\pi$ පරාමිතික සමීකරණවලින් අර්ථ දක්වේ. "t" ලක්ෂ්‍යයේ දී ස්පර්ශකය x හි ධන දිශාව සමඟ සාදන $\alpha\,(0 \le \alpha \le \pi)$ කෝණය, $0 < t \le \frac{\pi}{3}$ විට $\frac{\pi}{2} + \frac{3t}{2}$ බව පෙන්වන්න. $\frac{\pi}{3} < t \le \pi$ විට α සොයන්න.

(ආ) ධ්‍රැවක ඛණ්ඩාංක පිළිවෙළින් (r_1, θ_1) සහ (r_2, θ_2) වූ P_1 සහ P_2 ලක්ෂ්‍ය දෙක අතර දුර සොයන්න. P_1P_2 විශ්කම්භයක් සේ ඇති වෘත්තයේ සමීකරණය ධ්‍රැවක ආකාරයෙන් ලබා ගන්න.
[කාටීසියානු ඛණ්ඩාංක භාවිතය සඳහා ලකුණු දෙනු නොලැබේ.]

12. අරය r වූ අචල වෘත්තයක තලයේ වෘත්තයෙන් පිටත පිහිටි P විචල්‍ය ලක්ෂ්‍යයක් විචලනය වන්නේ, P සිට වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකයක දුර, වෘත්තයේ අචල ස්පර්ශකයක සිට P ට ඇති ලම්බ දුරෙහි k ගුණාකාරයක් වන පරිදි ය.

අචල ස්පර්ශකය $y-$ අක්ෂය ලෙස ද අචල වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය හරහා යන්නා වූ ද අචල ස්පර්ශකයට ලම්බවූ ද රේඛාව $x-$ අක්ෂය ලෙස ද ගනිමින්, P හි පථය

$$(1-k^2)x^2 + y^2 - 2rx = 0$$

යන්නෙන් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

$k = 1$ විට පථය හඳුන්වා දෙන්න.

$k \neq 1$ නම් ඉහත සමීකරණය, k හි අගය අනුව,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{හෝ} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ආකාරයට ප්‍රකාශකර මෙම කේතුකයේ විකේන්ද්‍රිකතාව k බව පෙන්වන්න; මෙහි a, b යනු ධනාත්මක සංඛ්‍යා වේ.