සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
முழுப் பதிப்புரிமையுடையது]
All Rights Reserved]

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம் / Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1997 අගෝස්තු (නව නිර්දේශය)
கல்விப் பொதுத் தராதரப்பத்திர(உயர் தர)ப் பரீட்சை, 1997 ஓகஸ்ற் (புதிய பாடத்திட்டம்)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1997 (New Syllabus)

ව්‍යවහාරික ගණිතය I
பிரயோக கணிதம் I
Applied Mathematics I

06
S I

පැ තුනයි / மூன்று மணி / Three hours

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

අවශ්‍ය තැන්හි දී ගුරුත්වජ ත්වරණය $g = 10\ \text{m s}^{-2}$ ලෙස ගන්න.

1. කාලය $t = 0$ වන මොහොතේ දී බර අංශුවක් පොළවේ සිට u ප්‍රවේගයක් සහිත ව සිරස් ලෙස උඩු අතට ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. අංශුව හා පොළොව අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය e (< 1) නම්, $t \geq 0$ වන සියලු t අගයන් සඳහා අංශුවේ චලිතය සඳහා ත්වරණ-කාල වක්‍රයේක් ප්‍රවේග-කාල වක්‍රයේක් දළ සටහන් අඳින්න.

   (අ) අංශුව පළමු වරට ඉහළ නගිමින් හා පහළ බසිමින් සිටෙන විට පොළොවට ඉහළින් h උසක පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් පසු කර යන්නේ t_1, t_2 වේලාවන්හි දී නම්,

$$t_1 t_2 = \frac{2h}{g}$$

   බව පෙන්වන්න.

   (ආ) අංශුව නිශ්චලතාවට පැමිණීමට පෙර මග ගෙවා යන මුළු දුර ප්‍රවේග-කාල වක්‍රය භාවිතයෙන් සොයා සම්පූර්ණ චලිත කාලය තුළ අංශුවේ මධ්‍යක වේගය

$$\frac{u}{2(1+e)}$$

   බව අපෝහනය කරන්න.

2. O නම් ලක්ෂ්‍යයක සිට සිරසට α කෝණයකින් u ආරම්භක ප්‍රවේගයක් සහිත ව ගුරුත්වය යටතේ අංශුවක් ප්‍රක්ෂේප කර ඇත්තේ, O මූලය සමුද්දේශයෙන් සිරස් හා සිරස් බණ්ඩාංක පිළිවෙළින් x හා y ලෙස පිහිටන P නම් ලක්ෂ්‍යයක් හරහා යන පරිදි ය.

$$y = x \tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2} \sec^2\alpha$$

   බව පෙන්වන්න.

   P හි දී අංශුවේ පෙනෙහි දිශාව සිරස සමග β කෝණයක් සාදයි නම්

$$\tan\alpha + \tan\beta = \frac{2y}{x}$$

   බව අපෝහනය කරන්න.

   P හරහා යන අංශුවට සිදිය හැකි මාර්ග දෙකක් වෙයි නම් හා P හි දී මෙම මාර්ග දෙක අතර කෝණය සෘජුකෝණයක් වෙයි නම්

$$x^2 + 2y^2 - \frac{u^2}{g} y = 0$$

   බව සාධනය කරන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

3. (අ) P හා Q නම් කුඩා විදුරු බෝල දෙකක් පිළිවෙලින් $3\mathbf{i} - \mathbf{j}$ හා $a\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ ප්‍රවේග සහිතව Oxy තලයේ චලනය වෙමින් පවතී. මෙහි a යනු නියතයක් ද, $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ යනු පිළිවෙලින් $\overrightarrow{Ox}$ හා $\overrightarrow{Oy}$ අක්ෂ දිශාවේ ඒකක දෛශික ද වේ. $t = 0$ වේලාවේ දී $A \equiv (-3, -2)$ ලක්ෂ්‍යයෙහි P පිහිටන අතර $B \equiv (2, 8)$ ලක්ෂ්‍යයෙහි Q පිහිටයි.

Q ට සාපේක්ෂව P හි පෙනෙහි සමීකරණයක් මෙම චලිතයේ දී විදුරු බෝල දෙක අතර ඇති වන කෙටි ම දුරක් සොයන්න. එනයින් Q සමඟ P ගැටීම සිදු විය හැක්කේ $a = 2$ ම නම් පමණක් බව අපෝහනය කරන්න.

(ආ) m ස්කන්ධයෙන් යුතු අංශුවක් පොළොවේ සිට සිරස් ලෙස උඩු අතට u ප්‍රවේගයකින් ප්‍රක්ෂේපණය කරනු ලැබේ. අංශුවෙහි මුළු ශක්තිය සම්පූර්ණ චලිතය ඔස්සේ ම සංස්ථිතව පවතින බව පෙන්වන්න.

4. ස්කන්ධය M හා ආනතිය $\alpha \left(< \frac{\pi}{2}\right)$ වන කුස්සයක් සර්ෂණ සංගුණකය $\mu\,(< \tan\alpha)$ වන රළු සිරස් තලයක් මත තබා ඇත. ස්කන්ධය $kM\ (k \geq 1)$ වන සුමට අංශුවක් කුස්සයේ මුහුණත මත වැඩිතම බෑවුම් රේඛාව දිගේ V ප්‍රවේගයකින් උඩු අතට ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. කුස්සය චලනය වෙයි නම්, ඕනෑ ම මොහොතක අංශුව හා කුස්සය අතර ප්‍රතික්‍රියාව

$$\frac{kMg\ (\cos\alpha + \mu \sin\alpha)}{1 + k\sin^2\alpha - \mu k \sin\alpha\cos\alpha}$$

බව පෙන්වන්න.

T කාලයක දී අංශුව ප්‍රක්ෂේපණ ලක්ෂ්‍යය වෙත ආපසු පැමිණෙන්නේ නම්, μ සොයන්න.

$\mu = \frac{1}{2}\tan\alpha$ නම්,

$$T \geq \frac{4\sqrt{2}\,V}{g}\left[\frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{k^{-\frac{1}{2}}}\right]^{-1}$$

බව අපෝහනය කරන්න.

5. m ස්කන්ධයකින් යුතු P නම් අංශුවක් සුමට සිරස් මේසයක් මත තබා, මේසය මත A, B, C නම් ලක්ෂ්‍ය තුනකට එය ඇදා ඇත්තේ ස්වභාවික දිග පිළිවෙලින් l_1, l_2, l_3 ද මාපාංක පිළිවෙලින් $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ද වන තන්තු තුනක් මගිනි.

ABC යනු පාදයක දිග a සහිත සමපාද ත්‍රිකෝණයක් නම් ද, ත්‍රිකෝණයේ G කේන්ද්‍රකයෙහි අංශුවට සමතුලිත ව නිශ්චලතාවේ පිහිටිය හැකි නම් ද

$$a\left(\frac{\lambda_1}{l_1} - \frac{\lambda_2}{l_2}\right) = (\lambda_1 - \lambda_2)\sqrt{3} \quad \text{බවත්,}$$

$$a\left(\frac{\lambda_2}{l_2} - \frac{\lambda_3}{l_3}\right) = (\lambda_2 - \lambda_3)\sqrt{3} \quad \text{බවත්}$$

පෙන්වන්න.

$\lambda_2 = \lambda_3$ ලෙස ගෙන, a හා සසඳන විට x නම් කුඩා දුරෙකින් අංශුව $\overrightarrow{AG}$ ඔස්සේ BC පාදය වෙතට විස්ථාපනය කොට නිශ්චලතාවේ සිට මුදා හැරියේ නම්, මෙවිට

$$\frac{\lambda_1}{l_1}\left(\frac{a}{\sqrt{3}} + x - l_1\right) + \frac{2\lambda_2}{l_2}(BP - l_2)\cos A\hat{P}B + m\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

බව පෙන්වන්න.

$\frac{x}{a}$ හි එකකට වඩා වැඩි බලයන් නොසලකා හැරීමෙන්

$$BP = \frac{a}{\sqrt{3}} - \frac{x}{2} \quad \text{බවත්}$$

$$\cos A\hat{P}B = \frac{3\sqrt{3}}{4a}x - \frac{1}{2} \quad \text{බවත්}$$

පෙන්වන්න.

එනයින්, $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} + 2\frac{l_1}{l_2} > \frac{3\sqrt{3}}{2a}l_1$ බව දී ඇත්නම්,

කුඩා x අගයන් සඳහා P අංශුවේ චලිතය පරල අනුවර්ති බව අපෝහනය කරන්න.

6. දෘඩ වස්තුවක් මත ක්‍රියා කරන සමාන්තර නොවන ඒකතල බල තුනක් මගින් එම වස්තුව සමතුලිතතාවේ පිහිටයි නම් එම බල තුන උක්ෂ්‍යයක දී හමු විය යුතු බව පෙන්වන්න.

A සහ B කේන්ද්‍ර සහිතව වෙනස් අරයන් ඇති එක එකෙහි බර W වන සුමට ඒකාකාර ගෝල දෙකක්, ශීර්ෂය යටි අතට පිටින සේ අචල ව තබා ඇති සුමට සෘජු වෘත්තාකාර කුහර කේතුවක් ඇතුළත සමතුලිතතාවේ පවතින්නේ එක් එක් ගෝලය එක් උක්ෂ්‍යයක දී පමණක් කේතුව ස්පර්ශ කරන පරිදි ය. කේතුවේ අඩ-සිරස් කෝණය $\frac{\pi}{3}$ වන අතර එහි අක්ෂය සිරස සමග $\beta \left(< \frac{\pi}{6}\right)$ කෝණයක් සාදයි. AB රේඛාව උඩු සිරස සමග θ කෝණයක් සාදයි නම්,

$$\theta = \tan^{-1}\left(\cot 2\beta - \frac{1}{2}\operatorname{cosec} 2\beta\right)$$

බව පෙන්වන්න.

කේතුවේ පැතිවල ප්‍රතික්‍රියා සොයන්න.

7. (අ) $A_i \equiv (x_i\ y_i)$ යි දී xOy තලයේ ක්‍රියා කරන $(X_i,\ Y_i)$ යනුවෙන් සමන්විත බල පද්ධතියක් සාධාරණ වශයෙන් G_O යුග්මයක් සමග O යි දී ක්‍රියා කරන $(X_0,\ Y_0)$ තනි බලයට ඌනනය කළ හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි

$i = 1, 2, \text{-----}, n$ වේ,

$X_0^2 + Y_0^2 \neq 0$ නම්, පද්ධතිය $\mathbf{R}$ යනුවෙන් දක්වන තනි සම්ප්‍රයුක්ත බලයකට තුල්‍ය වන බව පෙන්වන්න.

$\mathbf{R}$ බලය $(-1, -1)$ හා $(4, -2)$ ලක්ෂ්‍ය හරහා යන්නේ නම් සහ $|\mathbf{R}| = \frac{1}{2}$ බව දී තිබෙන විට X_0, Y_0 හා G_O සොයන්න.

(ආ) පද්ධතියක්, BC, CA, AB රේඛා දිගේ එම අකුරුවල අනුපිළිවෙලට පෙන්නුම් කෙරෙන දිසා ඔස්සේ ක්‍රියා කරන $P, \lambda P, \lambda^2 P$ බල තුනකින් සමන්විත වෙයි. සම්ප්‍රයුක්ත බලය ABC සුළු කෝණික ත්‍රිකෝණයේ ලම්බකේන්ද්‍රය හරහා යයි නම්,

$$\frac{1}{\cos A} + \frac{\lambda}{\cos B} = \frac{\lambda^2}{\cos(A + B)}$$

බව පෙන්වන්න.

λ අනිවාර්යයෙන්ම සෘණ විය යුතු බව අපෝහණය කරන්න.

8. ඒකාකාර සුමට දණ්ඩක් AB, BC හා CD නම් කැලි තුනකට කපා ඇත්තේ ඒවායේ දිග පිළිවෙළින් l, $2l$ හා l වන පරිදි ය. මේවා B යි දී C යි දී සුමට ලෙස සන්ධි කොට කේන්ද්‍රය O හා අරය $2l$ වන අචල සුමට ගෝලයක් මත නිශ්චලතාවේ තබා ඇත්තේ BC යි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයක් A හා D අන්ත දෙකක් ගෝලය ස්පර්ශ කෙරෙන පරිදිය. BC දණ්ඩ මත එහි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයේ දී ප්‍රතික්‍රියාව $\frac{91\ W}{100}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි W යනු දණ්ඩෙහි බර වේ.

C සන්ධියේ දී CD දණ්ඩ මත ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය හා දිශාවක් එහි ක්‍රියා රේඛාවට OD හමු වන ලක්ෂ්‍යයක් සොයන්න.

9. h උසැති ඒකාකාර සෘජු වෘත්තාකාර සන කේතුවක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය කේතුවේ ශීර්ෂයේ සිට $\frac{3}{4}h$ දුරෙකින් අක්ෂය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

අරය r ද උස h ද වන ඒකාකාර සන සෘජු වෘත්තාකාර සිලින්ඩරයක් සිදුරු කර හැරීමෙන් අරය r හා උස $\frac{h}{2}$ වන සන සෘජු වෘත්තාකාර කේතුවක් ඉවත් කරනු ලබන්නේ කේතුවේ ආධාරකය සිලින්ඩරයේ එක් කෙළවරක් සමග සම්පාත වන පරිදි ය. ඉතිරි වෙන කොටසේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය කේතුවේ ආධාරකයේ සිට අක්ෂය මත $\frac{23}{40}h$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

භාරන ලද සිලින්ඩරය එහි ආධාරකය සිරස් තලයක් මත පිහිටන සේ තබනු ලැබේ. මෙම තලය ක්‍රමයෙන් උඩු අතට ඇල කෙරෙන විට ලිස්සා යාම වැලැක්වීමට ප්‍රමාණවත් පරිදි තලය රළු නම්, භාරන ලද සිලින්ඩරය ඇද වැටීම සඳහා සිරස සමග තලයට සිතිය යුතු අඩු ම ආනතිය සොයන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

10. AB, BC, CA, CD, DA දුඩු පහක් එලායේ A, B, C, D අන්තවල දී සුවල ලෙස සන්ධි කිරීමෙන් ලබා ගත් රාමු සැකිල්ලක් සිරස් තලයක තබා ඇත්තේ AB සිරස් ලෙසත් AC සිරස් ලෙසත් පිහිටන පරිදි ය.

මෙහි $AB = AC =$ මීටර 10 ; $\widehat{BAD} = \frac{3\pi}{4}$ හා $\widehat{ACD} = \frac{2\pi}{3}$ වේ. රාමුසැකිල්ල D හි දී 1 N සිරස් භාරයක් දරන අතර සමතුලිතතාව පවත්වා ගැනෙන්නේ පිළිවෙළින් Aහි දීත් Bහි දීත් යෙදෙන P හා Q විශාලත්ව ඇති සිරස් බල දෙකක් මඟිනි. $Q = \frac{1}{2}\left(3 + \sqrt{3}\right) N = 2{\cdot}37\ N$ බව පෙන්වන්න.

බෝ අංකනය භාවිත කොට මෙම රාමුසැකිල්ල සඳහා ප්‍රත්‍යාබල රූප සටහනක් අඳින්න. එනයින් දඬු පහේ ප්‍රත්‍යාබල නිර්ණය කොට එවා ආතතිද තෙරපුම් ද යන වග දක්වන්න.

11. ස්ථිති විද්‍යාවෙහි එන "සීමාකාරී ඝර්ෂණ බලය" යන පදය අර්ථ දක්වන්න.

පාපැදියක එක සමාන රෝද දෙකෙහි A හා B කේන්ද්‍ර යා කෙරෙන රේඛාවේ දිග $2a$ වේ. පාපැදියේ හා පැද යන්නාගේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය AB රේඛාවේ සිට $h - r$ සිරස් උසකින් ද, පිටුපස රෝදයේ කේන්ද්‍රය වන A සිට AB රේඛාව දිගේ මනින විට $a - d\,(d > 0)$ සිරස් දුරකින් ද පිහිටයි. මෙහි r යනු එක් එක් රෝදයේ අරය වේ. ඉදිරිපස රෝදයට තිරිංග යෙදූ විට පාපැදිය සහ පැද යන්නාට $\alpha\ \left(< \frac{\pi}{2}\right)$ ආනතියකින් යුතු රළු පාරක් මත නිශ්චලතාවයේ පිටිමට හැකි යයි සිතන්න. A ලක්ෂ්‍යයට ඉහළින් B ලක්ෂ්‍යය තිබෙන සේ පාපැදියත් එය පැදයන්නාත් වැඩි තම බැවුම් රේඛාව සහිත සිරස් තලයක පිහිටයි.

$$\alpha \leq \tan^{-1}\left[\frac{\mu(a-d)}{\mu h + 2a}\right]$$

බව පෙන්වන්න; මෙහි μ යනු පාර හා රෝද අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය වේ.

$\mu < \frac{a-d}{h}$ බව උපකල්පනය කරමින්, පිටුපස රෝදයට තිරිංග යෙදූ විට පාපැදිය හා පැද යන්නාට වැඩි තම බැවුම් රේඛාව සහිත සිරස් තලයක රළු පාරක් මත නිශ්චලතාවේ පිහිටීම සඳහා පාරට සිඹිය හැකි වැඩි ම ආනතිය ද සොයන්න.

12. S නම් පරීක්ෂණ නියැදි අවකාශයෙහි එක හා සමාන ව සිදු විය හැකි සුමඟ සිද්ධි හරියට ම n සිඛෙයි. සුමඟ සිද්ධි p ඇතුළත් වන්නා වූත් S ට අයත් වන්නා වූත් ඕනෑ ම සිද්ධියක් E යැයි සිතන්න. E සිද්ධියේ සම්භාවිතාව වන $P(E)$ අර්ථ දක්වන්න.

S ට ඇතුළත් A හා B නම් ඕනෑ ම සිද්ධි දෙකක් සඳහා, පූර්ණ අංකනයකට අනුව

(i) $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$ බවත්

(ii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ බවත්

සාධනය කරන්න.

(අ) $2p, p^2$ හා $4p-1$ සංඝටක සම්භාවිතා සහිත නියැදි ලක්ෂණ තුනකින් සමන්විත ව නියැදි අවකාශයක් පිහිටයි. පිළිගත හැකි p හි අගය සොයන්න.

(ආ) පුද්ගලයින් 50 දෙනෙකුගේ කණ්ඩායමක, 30 දෙනකු වයස අවුරුදු 35 ට අඩු වෛද්‍යවරුය; 10 දෙනකු වයස අවුරුදු 35 ට වැඩි වෛද්‍යවරුය; 4 දෙනකු වයස අවුරුදු 35 ට අඩු වෛද්‍යවරු නොවන අය වේ; 6 දෙනකු වයස අවුරුදු 35 ට වැඩි වෛද්‍යවරු නොවන අය වේ

මෙම කණ්ඩායමේ වෛද්‍යවරුන්ගෙන් සැදි කුලකය A ලෙසත් වයස අවුරුදු 35 ට වැඩි පුද්ගලයින්ගෙන් සැදි කුලකය B ලෙසත් දක්වේ යැයි සිතමු. අර්ථ දක්වීම් භාවිත කොට ගෙන $P(A)$, $P(B)$ හා $P(A \cap B)$ සොයන්න.

$P(A \cup B)$ හි අගය අපෝහනය කොට, ඔබේ ප්‍රතිඵලය වචනවලින් ලියා දක්වන්න.

සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
முழுப் பதிப்புரிமையுடையது)
All Rights Reserved]

7670

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம் / Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1997 අගෝස්තු (නව නිර්දේශය)
கல்விப் பொதுத் தராதரப்பத்திர(உயர் தர)ப் பரீட்சை, 1997 ஓகஸ்ற்று (புதிய பாடத்திட்டம்)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1997 (New Syllabus)

ව්‍යවහාරික ගණිතය II
பிரயோக கணிதம் II
Applied Mathematics II

06
S | II

පැය තුනයි / மூன்று மணி / Three hours

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

අවශ්‍ය තැන්හි ගුරුත්වජ ත්වරණය, $g = 10\,\text{m s}^{-2}$ ලෙස ගන්න.

1. වේගය තත්පරයට මීටර් V වන විට, එකක ස්කන්ධයකට $4g\left(\frac{V}{u}\right)^2$ N ප්‍රතිරෝධයක් සිඟෙන මාධ්‍යයක $u\ \text{m s}^{-1}$ වේගයක් සහිතව බර අංශුවක් උඩු අතට ප්‍රක්ෂේපණය කරනු ලැබේ. අංශුව උපරිම ලක්ෂ්‍යයට ළඟාවන්නේ තත්පර $\frac{u \tan^{-1} 2}{20}$ කාලයකට පසුව බව පෙන්වන්න.

අංශුව මුල් ප්‍රක්ෂේපණ ලක්ෂ්‍යයට නැවත පැමිණෙන විට එහි වේගය $\frac{u\sqrt{5}}{5}\ \text{m s}^{-1}$ බව පෙන්වන්න.

2. ළමා උයනක සිඟෙන ඔන්විල්ලාවක් සැහැල්ලු සිහින් AB ලැල්ලකින් හා එක ම තිරස් මට්ටමේ පිහිටි $A'B'$ අවල ලක්ෂ්‍ය දෙකකට සවි කරන ලද එක එකක දිග l බැගින් වූ, දිග සිරස්, සැහැල්ලු AA', BB' සමාන කඹ දෙකකින් සමන්විත වේ. ස්කන්ධය m වූ ළමයෙක්, ඔහුගේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය G ලැල්ල මත පිහිටන පරිදි ලැල්ලේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය මත ඉඳගෙන සිටී. ලැල්ලට, $ABB'A'$ තලයට ලම්බව සිරස් $u\ (< \sqrt{2gl}\ )$ ප්‍රවේගයක් දෙනු ලැබේ.

(i) ළමයා ඔන්විල්ලාවට සාපේක්ෂ ව නිසල ව ඉඳගෙන සිටී. θ යනු $ABB'A'$ හි සිරසට ආනතිය විට කඹයේ ආතතිය T,

$$\frac{T}{mg} = \frac{u^2}{2gl} + \frac{3}{2}\cos\theta - 1$$

යන්නෙන් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

(ii) ඔන්විල්ලාව $\theta = \alpha$ ස්ථානික නිසලතා පිහිටීමට පැමිණි විට ළමයා සම්පූර්ණ වී $ABB'A'$ තලයේ ලැල්ල මත වහාම සිට ගෙන ඉන් පසු ක්‍රමයෙන් පහත් වී ඔන්විල්ලාව $\theta = 0$ සිරස් පිහිටීමට ආපසු පැමිණෙන්නේ ඉදගත් ඉරියව්වට එයි. ඔන්විල්ලාවේ කේන්ද්‍රික විස්තාරය α සිට β දක්වා වැඩි වන බව පෙන්වන්න; මෙහි

$$\cos\beta = \left(1 - \frac{h}{l}\right)\cos\alpha$$

වන අතර h යනු ළමයා ලැල්ල මත සිටගෙන ඉන්නා විට ලැල්ලේ සිට G ට ඇති දුර වේ.

ළමයා විසින් වැය කරන ලද ශක්තිය කොපමණ ද?

[අනෙක් පිට බලන්න.

3. t වේලාවේ දී Oxy තලයෙහි P නම් අංශුවක ධ්‍රැවක බණ්ඩාංක (r, θ) යැයි සිතමු. $\overrightarrow{OP}$ දිගේ වන ඒකක දෛශිකය $\mathbf{i}_r$ ලෙසත් $\mathbf{i}_r$ ට ලම්බක වැඩිවන θ දිශාව ඔස්සේ වන ඒකක දෛශිකය $\mathbf{i}_\theta$ ලෙසත් ගන්න. $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \cos\theta$ හා $\sin\theta$ ඇසුරෙන් $\mathbf{i}_r, \mathbf{i}_\theta$ ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ යනු පිළිවෙලින් $\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}$ කාටීසීය අක්ෂ ඔස්සේ වන ඒකක දෛශික වේ.

(i) $\dfrac{d\mathbf{i}_r}{dt} = \left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)\mathbf{i}_\theta$ බවත්

(ii) $\dfrac{d\mathbf{i}_\theta}{dt} = -\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)\mathbf{i}_r$ බවත්

පෙන්වන්න.

t වේලාවේ දී P හි $\mathbf{V}$ ප්‍රවේගය,

$$\mathbf{V} = \left(\frac{dr}{dt}\right)\mathbf{i}_r + \left(r\frac{d\theta}{dt}\right)\mathbf{i}_\theta$$

මගින් දෙන බව අපෝහණය කරන්න.

$r = 1 + \cos\theta$ වක්‍රය දිගේ නියත වේගයක් සහිතව P චලනය වෙයි නම්, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}_r$ යනු සෘණ නියතයක් බව ඔප්පු කරන්න. මෙහි $\mathbf{a}$ යනු t වේලාවේ දී P හි ත්වරණය වේ.

4. A හා B එක එකක බර M බැගින් වූ සමාන සුමට ගෝල දෙකකි. A ගෝලය $\mathbf{u}$ ප්‍රවේගයෙන් ගොස් නිශ්චලතාවේ තිබෙන B ගෝලය හා ගැටේ. ගැටුම් කේවල ප්‍රත්‍යාස්ථ වන අතර ගැටුමෙන් පසු A, B ගෝලවල ප්‍රවේග පිළිවෙලින් $\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B$ වේ. රේඛීය ගම්‍යතා හා ශක්ති සංස්ථිති නියම දෛශික ආකාරයෙන් ලියා දක්වන්න. එනයින් හෝ වෙනත් ක්‍රමයකින් හෝ ගැටුමෙන් පසු A හා B ගමන් කරන මාර්ග එකිනෙකට ලම්බ වන බව පෙන්වන්න.

A හා B වල ස්කන්ධ කේන්ද්‍ර රැඹුව වන G හි ප්‍රවේගය V සොයන්න.

G ට සාපේක්ෂව රේඛීය ගම්‍යතා හා ශක්ති සංස්ථිති නියම සැළකීමෙන් ගැටුම නිසා ගෝලවල වේග වෙනස් නොවන බව පෙන්වා G ට සාපේක්ෂව ඒවායේ පෙර්වල (ගමන් මාර්ගවල) දල සටහනක් අඳින්න.

එනයින් පළමු ඡේදයේ සඳහන් කළ ප්‍රතිඵලය ජ්‍යාමිතිකව සාධනය කරන්න.

5. AA' යනු සුමට තිරස් මේසයක් මත ඇඳ ඇති අරය a හා කේන්ද්‍රය O වූ වෘත්තයක ජ්‍යායකි. $AOA' =$ රේඩියන 2α වේ. ස්කන්ධය m වූ ඉතා කුඩා සුමට P ගෝලයක් දිග a වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින් අචල O කේන්ද්‍රයට සම්බන්ධ කොට ඇති අතර A හි දී නිශ්චල ව තිබේ. ස්කන්ධය m වන ඉතා කුඩා වෙනත් සුමට Q ගෝලයක් මේසය ඔස්සේ $\overrightarrow{A'A}$ දිශාවට u ප්‍රවේගයෙන් A' සිට ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. P, Q ගෝල A හි දී කේවල ප්‍රත්‍යාස්ථ ගැටුමකට භාජනය වේ. ගැටුමෙන් පසු P හා Q හි ප්‍රවේග සොයා, දෙවැනි ගැටුම A' හි දී සිදු වන්නේ

$$\pi - \alpha = 2\cot\alpha$$

ම නම් පමණක් බව පෙන්වන්න.

එනයින් හෝ වෙනත් ක්‍රමයකින් හෝ අනතුරුව ඇති වන P ගේ හා Q ගේ චලිතය අපෝහනය කරන්න. ඔබේ පිළිතුරට හේතු දක්වන්න.

6. ස්කන්ධය M වූ හිම ක්‍රීඩකයෙක් සුමට විශාල තිරස් හිම තහඩුවක් මත පිටගෙන, නිශ්චල ව සිටී. එක එකක ස්කන්ධය m බැගින් වූ බර ගෝලාකාර කුඩා බෝල දෙකක් ඔහු අත ඇත.

(i) හිම ක්‍රීඩකයා මෙම බෝල දෙක සමගාමීව තිරස් දිශාවකට u සාපේක්ෂ ප්‍රවේගයක් සහිතව විසි කරයි. හිම ක්‍රීඩකයා ලබා ගන්නා ප්‍රවේගයත්, ඔහු විසින් වැය කරන ලද ශක්තියත් සොයන්න.

(ii) හිම ක්‍රීඩකයා මෙම බෝල දෙක එක් එක් අවස්ථාවේ දී u සාපේක්ෂ ප්‍රවේගයක් සහිතව එකම තිරස් දිශාවකට අනුයාත ව විසි කරයි. හිම ක්‍රීඩකයා ලබා ගන්නා ප්‍රවේගය

$$\frac{(2M + 3m)\ mu}{(M + 2m)\ (M + m)}$$ බවත්

ඔහු විසින් වැය කරන ලද ශක්තිය

$$\frac{1}{2}\left[\frac{2M^2 + 4Mm + m^2}{(M + m)\ (M + 2m)}\right] m u^2$$ බවත්

පෙන්වන්න.

7. X විවික්ත සසම්භාවී විචල්‍යයක ගණිත අපේක්ෂාව $E(X)$ සහ විචලනාව $\mathrm{Var}(X)$ අර්ථ දක්වන්න.

$$\mathrm{Var}(X) = E[X(X-1)] + E(X) - [E(X)]^2$$

බව පෙන්වන්න.

X විවික්ත සසම්භාවී විචල්‍යයක් සියලු ධන නිඛිල අගයන් ගනු ලබන්නේ

$$P(X = x) = \frac{k2^x}{x!}$$

සම්භාවිතා ලැබෙන පරිදි ය; මෙහි k ධන නියතයකි.

k හි අගය සොයා, $E(X) = 2 \cdot 3$ බව පෙන්වන්න.

එනයින් $\mathrm{Var}(X)$ හි අගය පළමු දශමස්ථානයට අපෝහණය කරන්න.

[$e^2 \approx 7 \cdot 4$ බව ඔබට උපකල්පනය කළ හැක.]

8. X නම් සන්තතික සසම්භාවී විචල්‍යයක් සඳහා

(i) $E(aX + b) = a\,E(X) + b$ බවත්,

(ii) $Var(aX + b) = a^2\,Var(X)$ බවත්

සාධනය කරන්න; මෙහි a හා b නියත වේ.

එක්තරා රජයාණ්ඩුව නගරයක දිනපතා ජල පරිභෝජනය ලීටර මිලියනවලින් දක්වෙන X නම් සසම්භාවී විචල්‍යයක් වන අතර X හි සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතය $f(x)$,

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-\frac{x}{4}} & ; \ x > 0 \text{ සඳහා} \\ 0 & ; \text{අන් විටෙක} \end{cases}$$

මඟින් දෙනු ලැබේ; මෙහි k යනු ධන නියතයකි.

k හි අගය සොයා, නගරයේ දිනපතා ජල පරිභෝජනයෙහි මධ්‍යන්‍යය ලීටර 4×10^6 බව පෙන්වන්න.

දී ඇති දිනක නගරයේ ජල පරිභෝජනය ලීටර මිලියන හතරකට වඩා වැඩි වීමේ සම්භාවිතාව කොපමණ ද?

X හි සම්මත අපගමනයද සොයන්න.

9. (a) X සසම්භාවී විචල්‍යයක "ද්විපද ව්‍යාප්තිය $B(n\,p)$" අර්ථ දක්වන්න.

(i) X ද්විපද ආකාරයට ව්‍යාප්තව තිබේ නම්

$$\sum_{x=0}^{n} (x - \mu)^3 \, P(X = x)$$ n සහ μ පදවලින් ගණනය කරන්න; මෙහි $\mu = E(X)$

(ii) X නම් ද්විපද සසම්භාවී විචල්‍යයක මධ්‍යන්‍යය හා විචලනාව පිළිවෙළින් α හා β $(\neq 0)$ වේ.

$\alpha > \beta > 0$ බව හා

$\frac{\alpha^2}{\alpha - \beta}$ යනු ධන නිඛිලයක් බව පෙන්වන්න.

(b) පරීක්ෂණයක සත්‍යද අසත්‍යද යන්න ප්‍රකාශ කිරීමට අදළ පිළිතුරු 10 කින් අඩුමවශයෙන් 6 ක් අනුමානයෙන් නිවැරදිව ලබාගත හැකි සම්භාවිතාව සොයන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

10. $2a$ දිගැසි m ස්කන්ධය සහිත ඒකාකාර AB දණ්ඩක A කෙළවර හරහා යන දණ්ඩට ලම්බව පිහිටන අක්ෂයක් වටා දණ්ඩේ අවස්ථිති සූර්ණය $\frac{4}{3}\ ma^2$ බව පෙන්වන්න.

ඝර්ෂණ සංගුණකය ඉතා විශාල වූ ඉතා රළු තිරස් මේසයක A කෙළවර ස්පර්ශ වෙමින් AB දණ්ඩ තිරස් පිහිටීමක තිශ්චල ව පවතී. එය ඉතා සිරුවෙන් මෙම පිහිටීමෙන් විස්ථාපනය කරන ලදී. AB උඩු තිරසක් සමඟ θ කෝණයක් සාදන විට දණ්ඩේ කෝණික ප්‍රවේගය සොයන්න.

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ වන විට ඝර්ෂණ බලය එහි දිශාව වෙනස් කරන බවත් θ, $\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ අගයට ළඟාවීමට පෙර දණ්ඩ නියත වශයෙන් ම ලිස්සා යන බවත් පෙන්වන්න.

11. ආරම්භක මුළු ස්කන්ධය M_0 වන රොකට්ටුවක් දියත් කෙරෙන ස්ථානයේ තිශ්චලතාවෙහි තිබෙන අතර ස්කන්ධය λM_0 වන ඉන්ධන ප්‍රමාණයක් ද එයට තිබේ. මෙහි $0 < \lambda < 1$ වේ.

ඉන්ධන දහම k $(k > 0)$ නියත සීඝ්‍රතාවයකින් සිදුවන අතර ශූන්‍යකාරක වායු සිරස් ලෙස පහලට පිටකෙරෙන්නේ රොකට්ටුවට සාපේක්ෂව u_0 ප්‍රවේගයකිනි.

රොක්ට්ටුව එහා ඉහළ නගින්නේ

$$u_0 > \frac{M_0 g}{k}$$ ම නම් පමණක්

බව පෙන්වන්න.

t වේලාවේ දී රොකට්ටුවේ ස්කන්ධය $M = M(t)$ වන අතර එය $V = V(t)$ ප්‍රවේගයකින් සිරස් ලෙස උඩු අතට ගමන් කරමින් තිබේ. වලිතයට වාතයේ ප්‍රතිරෝධයක් නොමැති බව උපකල්පනයකොට, ප්‍රථම මූලධර්ම භාවිතයෙන්

$$\frac{dV}{dt} - \frac{u_0}{M}\ k + g = 0$$

යන වලිත සමීකරණය ලබාගන්න.
රොකට්ටුව එහා ඉහළ නගියි නම්, එහි උපරිම වේගය සොයන්න.

12. $Oxyz$ ශ්‍රිමාන අවකාශයේ (x, y, z) ලක්ෂ්‍යයේ දී ක්‍රියාකරන බලයක් $\mathbf{F} = F_x\,\mathbf{i} + F_y\,\mathbf{j} + F_z\,\mathbf{k}$ යැයි සිතමු.
මෙහි $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ යනු පිළිවෙළින් $\overrightarrow{Ox}$, $\overrightarrow{Oy}$, $\overrightarrow{Oz}$ කිට්ටිය අක්ෂ දිගේ ඒකක දෛශික වේ.
$L_0\mathbf{i} + M_0\mathbf{j} + N_0\mathbf{k}$ යනු O මූලය වටා $\mathbf{F}$ හි දෛශික සූර්ණය වෙයි නම්, $P \equiv (\xi, \eta, \varepsilon)$ ලක්ෂ්‍යය වටා $\mathbf{F}$ හි දෛශික සූරණය

$$(L_0 - \eta F_z + \varepsilon F_y)\mathbf{i} + (M_0 - \varepsilon F_x + \xi F_z)\mathbf{j} + (N_0 - \xi F_y + \eta F_x)\mathbf{k}$$

බව පෙන්වන්න.

පිළිවෙලින් $\left(0, 0, \frac{1}{5}\right)$, $\left(\frac{1}{3}, 0, 0\right)$ හා $\left(0, \frac{1}{4}, 0\right)$ ලක්ෂ්‍යවලදී ක්‍රියාකරන

$3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, $l\mathbf{i} + m\mathbf{j} - n\mathbf{k}$, $-3\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ බල තුනකින් පද්ධතියක් සමන්විත වේ.

පද්ධතියේ O මූලයේ දී ක්‍රියා කරන

$\mathbf{R}_0 = 5\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 11\mathbf{k}$ තනි බලයකට හා $\mathbf{G}_0 = L_0\mathbf{j} + M_0\mathbf{j} + N_0\mathbf{k}$ යුග්මයකට

ඌනනය වෙයි නම් l, m, n, L_0, M_0, N_0 යන මේවායේ සංඛ්‍යාත්මක අගයන් සොයන්න.

පද්ධතිය $\mathbf{R}$ තනි බලයකට ඌනනය වන බව අපෝහණය කොට $\mathbf{R}$ හි ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.